A matematikai tehetség fejlesztése

Géniusz Könyvek

A Géniusz Könyvtárat a Magyar Tehetségsegítő Szervezetek Szövetsége által koordinált Magyar Géniusz Program keretében megjelentetett kötetek alkotják. A sorozat célja, hogy széles körű, átfogó segítséget és eligazítást adjon a tehetséggondozás ügyében tevékenykedő szakembereknek és segítőknek.

A SOROZAT KÖTETEI

M. Nádasi Mária: Adaptív nevelés és oktatás

Revákné Markóczi Ibolya – Futóné Monori Edit – Balogh László: Tehetségfejlesztés a biológiatudományban

Vancsuráné Sárközi Angéla: Drámapedagógia a tehetséggondozásban

Szivák Judit: A reflektív gondolkodás fejlesztése

Czimer Györgyi – Balogh László: Az irodalmi alkotótevékenység fejlesztése

M. Nádasi Mária: A projektoktatás elmélete és gyakorlata

Balogh László–Mező Ferenc: Tehetségpontok létrehozása, akkreditációja

Orosz Róbert: A sporttehetség felismerésének és fejlesztésének pszichológiai alapjai

Mező Ferenc–Kiss Papp Csilla–Subicz István: Képzőművész tehetségek gondozása

Turmezeyné Heller Erika: A zenei tehetség felismerése és fejlesztése

Kirsch Éva–Dudics Pál–Balogh László: A tehetséggondozás lehetőségei fizikából

Bohdaneczkyné Schág Judit – Balogh László: Tehetséggondozás a közoktatásban a kémiatudományban

Kovács Gábor–Balogh László: A matematikai tehetség fejlesztése

Inántsy-Pap Judit – Orosz Róbert – Pék Győző – Nagy Tamás: Tehetség és személyiségfejlesztés

Csernoch Mária–Balogh László: Algoritmusok és táblázatkezelés – Tehetséggondozás a közoktatásban az informatika területén

Gyarmathy Éva: Hátrányban az előny – A szociokulturálisan hátrányos tehetségesek

Bodnár Gabriella – Takács Ildikó – Balogh Ákos: Tehetségmenedzsment a felsőoktatásban

Kovács Gábor – Balogh László

A MATEMATIKAI TEHETSÉG FEJLESZTÉSE

Magyar Tehetségsegítő Szervezetek Szövetsége, 2010

Készült a „Magyar Géniusz Integrált Tehetségsegítő Program – Országos Tehetségsegítő Hálózat Kialakítása" (TÁMOP 3.4.4-A/08/1-2009-0001) című projekt keretében.

A projekt az Európai Unió támogatásával és az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

A szakmai tartalomért a szerzők felelősek.

Felelős kiadó: Bajor Péter, a Magyar Géniusz Program projektmenedzsere

Felelős szerkesztő: Polyánszky Piroska

Borítóterv: Kállai-Nagy Krisztina

Nyomdai előkészítés: Jet Set Tipográfiai Műhely

A nyomdai munkálatokat a D-Plus végezte

Felelős vezető: Németh László

Printed in Hungary

Tartalom

Balogh László

I.

Általános alapfogalmak

1. A TEHETSÉG FOGALMA

A múlt század hetvenes éveitől kezdve világszerte az érdeklődés középpontjába került a tehetségtémakör. Azt megelőzően is próbálták feltárni a tehetség fogalmát, keresték a fejlődés gyökereit, de a gyakorlati fejlesztő munkához igazán az elmúlt négy évtizedben fogalmazták meg átfogó elméleteiket a kutatók. Most ezen eredményekből egy szűk áttekintésben foglaljuk össze a tehetség értelmezéséhez, fejlesztéséhez szükséges alapvető pszichológiai és pedagógiai ismereteket.

Az alábbiakban számos fontos kutatót és elméletet találunk, akik és amik a tehetség fogalmának, jelentésének és tartalmának tisztázásához hozzájárultak. Ez az áttekintés bővebb is lehetne (vö. Balogh 2006; Gyarmathy 2006; Tóth L. 2003), de a hangsúly itt azokon a fő gondolatokon van, amelyek a tehetség sokszínű fogalmának megértéséhez elengedhetetlenek. Nincs mindenki által egységesen elfogadott tehetségfogalom, de több olyan elmélet, modell született, amelyek mindegyike gyakran közel is áll egymáshoz, s egyben különbségeikkel ráirányítják figyelmünket a komplex tehetségfogalom árnyalt értelmezésére. Ezek közül tekintünk át az alábbiakban egy csokorra valót.

1.1. Az első lépések a tehetség értelmezéséhez

A 19. századtól kezdve az intelligencia- és tehetségkutatás néhány előfutára arra törekedett, hogy az emberi agy funkcióit elkülönítse, hogy így a több vagy kevesebb tehetséggel rendelkező egyének közötti különbségeket jobban megértsék. Ezen kutatók közül néhányan igen figyelemreméltóak, hiszen őket tekintjük a későbbi intelligencia-, majd az ebből kinövő tehetségkutatás előfutárainak.

Charles Darwin unokaöccse, Francis *Galton* (1822–1911) meg volt róla győződve, hogy a világon minden mérhető, és az agy körmérete standardjaként a koponya méreteit alkalmazta. Egyik francia kortársa, Paul *Broca* sebész és antropológus (1824–1880) azokról az elméleteiről volt híres, miszerint összefüggés van az agy súlya és körmérete, valamint az intelligencia között.

Galton és Broca elméleteit Alfred *Binet* színrekerülésével kezdték megkérdőjelezni, majd elvetni. Binet a Sorbonne pszichológiai laboratóriumának volt az igazgatója, ahol egyik asszisztense Piaget volt. Binet elvetette azt az elméletet, miszerint az agy mérete és az intelligencia között összefüggés lenne, és egy pszichológiailag megalapozott megközelítést keresett az intelligencia jelenségének értelmezésére. Jelentős mennyiségben gyűjtött olyan adatokat, amelyek az előző elméletekkel nem voltak összhangban. Tanítványa, Theodore Simon segítette Binet-t kutatásaiban. 1904-ben a francia Közoktatási Minisztérium felkérte Binet-t és Simont, hogy vizsgáljanak meg olyan gyerekeket, akik gyengén teljesítettek az iskolában, és akik tanulási nehézségekkel küzdöttek. Binet és Simon sok 3–11 éves gyereket vizsgált egy olyan skála segítségével, amit 30 teszt alapján állítottak össze. Ez a skála azt határozta meg, hogy a 30 teszt közül melyiket tudják megoldani a 3–11 éves átlagos képességű gyerekek az egyes korcsoportokra lebontva.

Ugyanekkor egy német pszichológusnak, William *Stern*nek (1871–1938) a hamburgi egyetemen jobb ötlete támadt. Egy olyan matematikai formulát javasolt, amiben a gyerek mentális korát a biológiai korával osztotta, majd az eredményt százzal szorozta. Ez a formula vezetett a közismert intelligencia-kvócienshez (IQ).

Az intelligenciakutatások intenzíven folytak a 20. században, s több kiváló kutató: Ch. *Spearman* (1904), L. L. *Thurstone* (1938), R. B. *Cattell* (1943), L. M. *Terman* és M. H. *Oden* (1954), J. P. *Guilford* (1967) vizsgálati eredményei jelentősen elősegítették, hogy kialakuljanak a tehetség értelmezésének – nemcsak az intelligenciát magába foglaló – úgynevezett többtényezős modelljei. Ezek már közelebb visznek bennünket a tehetség korrekt értelmezéséhez. Tekintsük át ezek közül a legfontosabbakat!

1.2. Joseph Renzulli 'háromkörös' tehetségkoncepciója

A modern tehetségkutatás egyik legjelentősebb állomását az amerikai Joseph *Renzulli* jelentette a Connecticuti Egyetemen 1977-ben. Háromkörös tehetségkoncepciójával rakta le a ma is világszerte alkalmazott elméleteinek alapját. „What makes giftedness?" (Miből áll a tehetség?) c. cikke (Renzulli 1978) hosszan tartó hatással volt a szakterületre. Renzulli (1978 és 1985) azt állítja, hogy az őt megelőző tehetségkutatásnak köszönhetően egyértelművé vált, hogy a tehetséget nem lehet egyetlen kritérium alapján meghatározni.

Renzulli elmélete három, a kreatív/produktív embereket jellemző tulajdonságra épül. Ez a három tulajdonság vagy komponens a következő:

- Átlagon felüli képességek.
- Feladat iránti elkötelezettség.
- Kreativitás.

Az átlagon felüli képességek az általános és a specifikus képességeket egyaránt magukba foglalják. Úgy kell őket értelmezni, mint az elérhető legmagasabb teljesítményszintet egy adott témában. A feladat iránti elkötelezettség a motivációhoz hasonlítható, de annál szűkebb értelmezésben. Pontosan azt jelenti, hogy az illető lelkesedik a feladatért, az vonzza őt. A kreativitás egy olyan átfogóbb fogalom, amit máshol zseniként, eminensként is neveznek.

⇒

Általános teljesítményterületek

Matematika • Képzőművészet • Természettan • Filozófia • Társadalomtudományok • Jog • Vallás • Nyelvek • Zene • Élettudományok • Mozgásművészet

Specifikus teljesítményterületek

Karikatúra • Csillagászat • Közvélemény-kutatás • Ékszertervezés • Térképkészítés • Koreográfia • Életrajz • Filmkészítés • Statisztika • Helytörténet • Elektronika • Komponálás • Kertépítészet • Kémia • Demográfia • Mikro-fényképezés • Várostervezés • Légszennyezés korlátozása • Költészet • Divattervezés • Szövés • Drámaírás • Reklám • Jelmeztervezés • Meteorológia • Bábozás • Marketing • Játéktervezés • Újságírás • Elektronikus zene • Gyermekgondozás • Fogyasztóvédelem • Főzés • Ornitológia • Bútortervezés • Navigáció • Genealógia • Szobrászat • Vadvilág kezelése • Mezőgazdasági kutatás • Állati tanulás • Filmkritika

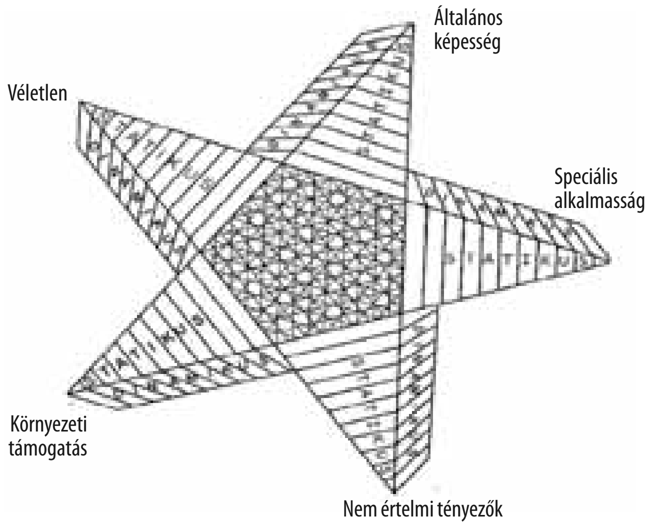
1. ábra. Renzulli háromkörös modellje

Renzulli szerint ezek közül egyik elem önálló jelenléte sem jelenti önmagában, hogy valaki tehetséges. A három elem interakciója vezet a tehetséges viselkedéshez (amint azt az *1. ábrá*n a három kör interakciójába eső satírozott terület is jelöli). Minden tulajdonság szükséges, és egyenlő szerepet játszik. Ebből következik, hogy az intelligencia nem az egyetlen feltétele a tehetségnek.

Renzulli a következőképpen foglalta össze álláspontját (Renzulli–Reis 1985, p. 28): „A tehetség olyan viselkedésformákból áll, amik az emberi vonások három alapcsoportjának interakcióját tükrözik. Ez a három alapcsoport az átlagon felüli általános és/vagy specifikus képességek, magasfokú feladat iránti elkötelezettség és kreativitás. A tehetséges viselkedést felmutató embereket azok, akik ezekkel a jegyekkel rendelkeznek, vagy ki tudják őket fejleszteni, és azokat az emberi teljesítmény bármilyen potenciálisan értékes területén hasznosítják. Azok az egyének, akik rendelkeznek ilyen interakcióval vagy képesek annak kialakítására a három terület között, az oktatási lehetőségeknek és szolgáltatásoknak széles skáláját igénylik, és ez utóbbiak gyakran hiányoznak a normál iskolai programból."

1.3. Abraham Tannenbaum csillagmodellje

Tehetségelméletében *Tannenbaum* (1983) azt állítja, hogy mind a belső (személyes), mind a külső (környezeti) tényezőkre szükség van. E tényezőket egy csillagdiagramban ábrázolja *(2. ábra),* ahol a tehetséget grafikusan a csillag öt ágának metszete jelöli.



2. ábra. Tannenbaum csillagmodellje

Véleménye szerint a tehetség fejlődése során az alábbi öt elem hat egymásra:

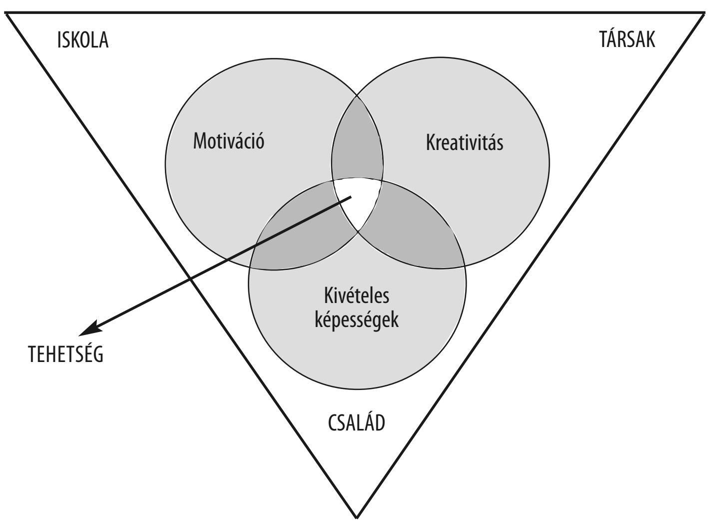
- Általános képességek: ez a G-faktor megfelelője, azé az általános intelligenciáé, amit az IQ-tesztekkel mérnek.
- Speciális alkalmasság: olyan speciális tehetség, amivel a személy rendelkezik és amiért környezete nagyra becsüli, mert az kivételes, speciális.
- Nem értelmi tényezők: ezek azok a személyes képességek, amik nem kapcsolhatók az intelligenciához, amik egy személy karakteréhez, egyéni jellemvonásaihoz kötődnek: önkép, motiváció, feladatorientáció stb.

- Környezeti támogatás: pl. a gyerek családja, iskolája, barátai. Gyakran van szükség rájuk a tehetség fejlődésének jó irányba való tereléséhez. Ez a szülők és a tanár részéről is nagyon fontos feladat.
- Véletlenek: ezekről a faktorokról legtöbbször elfeledkezünk, pedig ugyanolyan jelentősek.

Ezek a tényezők definíciójuknál fogva az ember életének legkevésbé kiszámítható eseményeit jelölik, mégis nagy jelentőségük van a tehetség megvalósításában és a potenciálok kifejezésében.

1.4. Franz Mönks többtényezős tehetségmodellje

Az idők során egyre nagyobb empirikus támogatást nyertek azok az elméleti feltételezések, amelyek a tehetséghez szükséges faktorok interakcióját vizsgálták. Ez vezetett *Mönks* többtényezős tehetségmodelljéhez. A kivételes képességek, a motiváció és a kreativitás összetevőkön kívül ez a modell a családot, az iskolát és a társakat is bevonja, mint társadalmi pilléreket *(3. ábra).*



3. ábra. Mönks–Renzulli komplex tehetségmodellje

Mönks a különleges képességek kategóriájába sorolja az intellektuális képességen túl a motorikus, a társadalmi és a művészi képességeket is. Ez annyit jelent, hogy nem csak a nagyon intelligens emberek esetében beszélünk tehetségről, hanem például Pablo Picassót (művészi) vagy a labdarúgó Johan Cruyft (motorikus) is tehetségnek nevezhetjük.

Ezek a kivételes képességek azonban nem elegendőek a tehetség manifesztálásához. A tehetséges személynek igen motiváltnak kell lennie. Más szóval nagy akaraterőre és kitartásra van szüksége ahhoz, hogy egy bizonyos feladatot vagy instrukciót örömmel tudjon kivitelezni (Mönks–Knoers 1997). A kreativitás szintén fontos eleme a személyiségnek. Kreativitásnak azt a képességet nevezzük, amelynek segítségével eredeti, inventív módon tudjuk a problémákat megoldani. A függetlenség és a produktív gondolkodás magas szintje a rutinszerű vagy reproduktív gondolkodással helyezhető szembe.

A társadalmi pillérek közül a család játssza a legfontosabb szerepet a tehetség nevelésében, mert biztosítani tudja, hogy a gyermek egészségesen és (lelkileg) kiegyensúlyozottan nőhessen fel. Másrészt arra is van példa, hogy a család nem ismeri fel vagy nem ismeri el a gyermek potenciális tehetségét, és ez negatívan befolyásolhatja a gyermeket. Az iskola szintén fontos pillér. Beleértjük mind a vezetést, mind a tantestületet. A tanárok között van, aki odafigyel a tehetségekre, és van, aki ignorálja őket az osztályában. A szerző véleménye szerint azonban amennyiben az iskolavezetés tisztában van a tehetséggondozással kapcsolatos problémákkal, az az egész iskola légkörére kihat, és pozitív hozzáállást eredményez. Így a tanárok könnyebben állnak elő a tehetséges gyermekek igényeinek kielégítését célzó saját kezdeményezésekkel. A harmadik pillért a társak jelentik. Társaknak azokat a gyerekeket nevezi Mönks, akik hasonló fejlettségi fokon állnak. A nem azonos szinten álló osztálytársak komolyan gátolhatják a tehetséges gyermek intellektuális, de leginkább pszichológiai fejlődését. A tehetséges tanulót gyakran tartják beképzeltnek vagy strébernek, ami aztán alulteljesítéshez és személyiségbeli torzulásokhoz is vezethet (Mönks–Van Boxtel 1985).

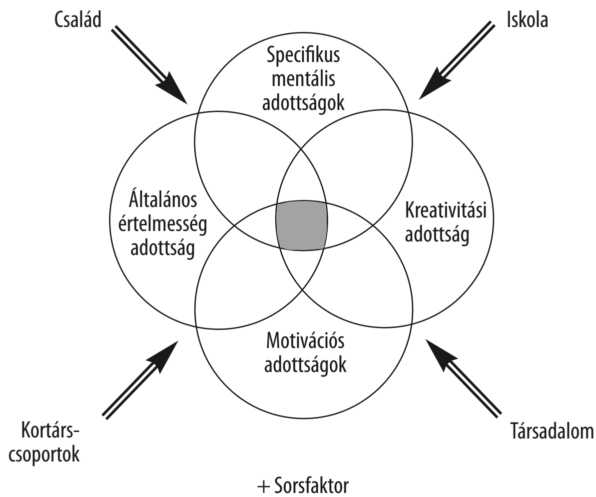
Mönks a tehetség fogalmát a következő leírással adja meg: „A tehetség három személyiségjegy interakciójából jön létre. Ennek a három jegynek (motiváció, kreativitás, kivételes képességek) az egészséges fejlődéséhez megértő, támogató társadalmi környezetre van szükség (család, iskola, társak). Más szóval: a hat faktor pozitív interakciója a tehetség megjelenésének előfeltétele” (Mönks–Knoers 1997, p. 192.).

1.5. Czeizel Endre 2 × 4 + 1 faktoros modellje

A hazai kutatók közül kiemelésre érdemes *Czeizel Endre* (1997) *2×4+1 faktoros modellje (4. ábra).* Ebben a szerző integrál minden olyan tényezőt, amely a fejlesztő munkában meghatározó szerepet játszik.

A szerző a Renzulli-féle háromkörös modellből indul ki, amikor a tehetség összetevőit meghatározza, azonban az átlagon felüli képességek körében különválasztja az általános intellektuális és a speciális mentális képességeket, természetesen ő is fontosnak tartja a kreativitást és a motivációs tényezőket.

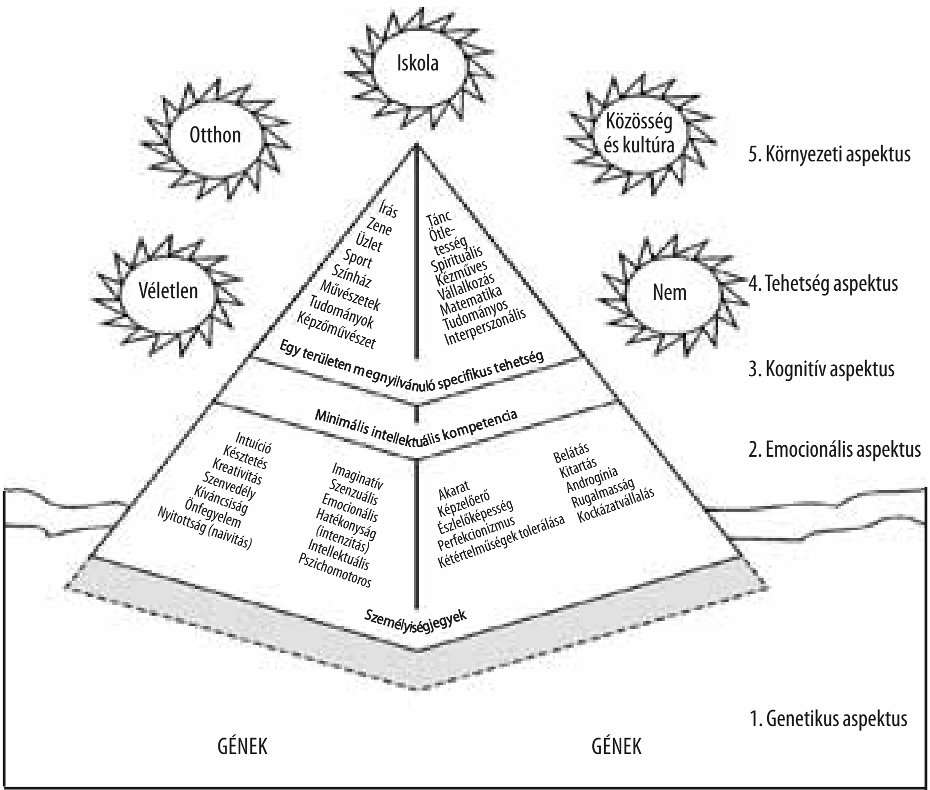
A környezeti tényezők a Mönksnél található háromról ugyancsak négyre módosulnak: Czeizel a társadalom közvetlen szerepét is hangsúlyozza (elvárások, lehetőségek, értékrend stb.) a tehetségesek kibontakozásában a család, az iskola és a kortárscsoportok mellett. Értelmezésében kilencedik faktorként jelenik meg a sors, amely az élet-egészség faktora: a tehetség kibontakozásához szükség van bizonyos élettartamra és megfelelő egészségi állapotra is.



4. ábra. Czeizel 2×4+1 faktoros modellje

1.6. Jane Piirto piramismodellje

Piirto (1999) *tehetséggondozási piramismodelljében* a tehetség összetevői jól rendszerezettek, és a fejlődést befolyásoló tényezők is megjelennek, amint azt az *5. ábrá*n szemügyre vehetjük.



5. ábra. Piirto tehetséggondozási piramisa

A genetikai alapok egyértelműek. Az emocionális aspektus azokat a személyiségjegyeket összegzi, amelyek általában jellemzik a kiemelkedő teljesítményt nyújtókat. A szerző a legjelesebb tehetségkutatók vizsgálataira építve összegzi ezeket a tulajdonságokat, hozzátéve, hogy a lista nem teljes, s természetesen vannak vitatott pontjai is. Ugyanakkor tényként állapítja meg, hogy a felnőttek hatékonyságukat személyiségüknek köszönhetik, és a sikeres felnőttek ezen jellemzők zömével rendelkeznek. A kognitív aspektusban a minimális intellektuális kompetencia jelenik meg. A tehetség aspektusa a modellben azokat a speciális területeket jelöli meg, amelyeken konkrétan kibontakozhat a gyerek tehetsége a képzőművészettől a sporton és kézművességen át az interperszonális szféráig. Végül a környezeti aspektust a „napocskák” fémjelzik. Döntőnek a szerző a három felső napot (otthon, iskola, közösség és kultúra) jelöli meg, a másik kettő a gyermek nemére és a véletlen adta lehetőségekre utal. Ezek mindegyike befolyásolja, hogy a tehetség kibontakozik-e vagy elsorvad.

1.7. Robert Sternberg információfeldolgozási modellje

A számítógépek, a mesterséges intelligencia és az emberi intelligencia modellezésének mai korában természetesnek tűnik, hogy az emberi intelligencia információfeldolgozási modellje kialakulhatott. Sternberg munkáját az emberi intelligencia fő, a pszichológiai és pedagógiai világot uraló információfeldolgozási modelljeként tartják számon. Noha a modell konceptuális keretei ezekben a szakmákban meggyőzőek, gyakorlati felhasználásai korlátozottak, mert nem dolgoztak ki megbízható mérési módszert a fogalom alkalmazására. Amíg ki nem dolgoznak egy ilyen mérést, nincs rá mód, hogy a modell hatékonyságát a meglévő megközelítésekkel összevetve felmérhessük.

A Sternberg-modell (1999) hármas alapú intelligenciaszerkezetet javasol, amely három alapvető információfeldolgozási képességből áll: metakomponensekből, teljesítménykomponensekből és ismeretszerzési komponensekből.

A *metakomponensek* nagyban hasonlítanak a metakogníció folyamataira. Tervezésből, ellenőrzésből és értékelési funkciókból állnak. Ezek az alfunkciók a következőkből tevődnek össze: (1) a létező problémák felismerése, (2) a problémák természetének tisztázása, (3) a problémamegoldás megtervezése, (4) a megoldási stratégia kiválasztása, (5) a megoldási folyamat mentális reprezentálása, (6) a tevékenység mentális erőforrásainak összehívása, (7) a megoldási folyamat ellenőrzése, és (8) a problémamegoldó sorozat végén a sikeresség elbírálása.

A *teljesítménykomponensek* azok a mentális folyamatok, amelyek a metakomponensi tevékenységeket viszik véghez. Ezek a készségek vagy képességek ismeretterületenként változnak. Alacsonyabb szintű mentális operációkként tartjuk őket számon, és természetükből kifolyólag automatikusabbak, mint a nagyban kognitív metakomponensek.

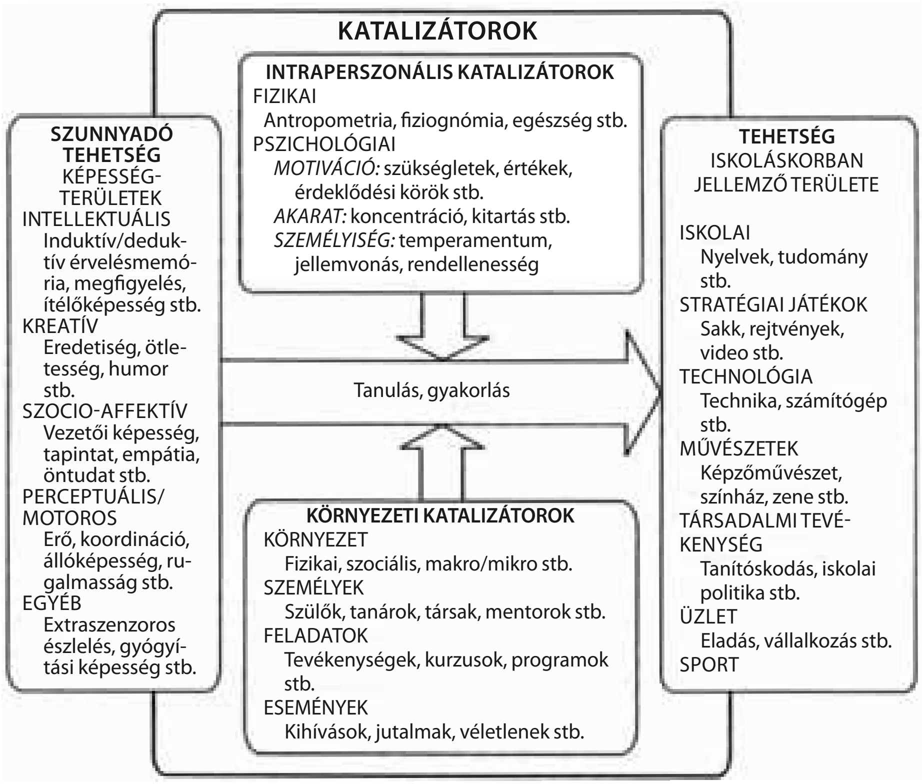
Az *ismeretszerzési komponensekbe* a szelektív kódolás, a szelektív kombináció és a szelektív összehasonlítás tartozik. A szelektív kódolás az a képesség, amivel a lényeges információt azonosítjuk, azt a hosszú távú memóriában tároljuk, és a lényegtelen információt kiselejtezzük. A *szelektív kombináció* az információnak sémákká, gestalttá, fogalommá, ötletté stb. való átalakításának a folyamata. (A hosszú távú memória könnyebben elérhető és használható, ha az információt megfelelően rendezzük egymáshoz kapcsolódó tömbökbe.) A *szelektív összehasonlítás* az a képesség, amivel a jelen és a múltbeli információk közötti összefüggéseket feltárjuk, és egy adott információnak az épp aktuális problémákhoz viszonyított jelentőségét felismerjük.

Sternberg körültekintő módon hívta fel arra a figyelmet, hogy az intelligens viselkedés kontextusfüggő. Azaz jobban viselkedhetünk olyan környezetekben, amiket megszoktunk, amiket igényeink szerint átalakíthatunk, vagy amiket mint számunkra legmegfelelőbbeket magunk választhatunk. Így egy adott iskolában, osztályban, tanmenetben, adott tanár vagy osztálytársak jelenlétében felállított feltételek és állapotok nem biztos, hogy a tehetséges tanuló számára is az ideális környezetet jelentik. Van olyan tanár, aki nem tanít természettudományokat, a természettudományosan tehetséges tanulók nagy bánatára. Egy másik osztályban vagy iskolában lehet, hogy az osztálytársak lesznek negatív hatással a felismert tehetséges gyerekekre. Tudnak-e ilyen környezetben a tehetséges tanulók intelligensen viselkedni? Sternberg elmélete szerint nem. Sternberg azt tanította meg nekünk, hogy az intelligenciáknak sok alaspektusa van, és hogy azoktól a kontextusoktól függnek, amiben a gyerekek magukat naponta találják.

1.8. Françoys Gagné modellje a szunnyadó és a megvalósult tehetségről

Françoys Gagné, kanadai pszichológus a szunnyadó tehetséget az adottságokkal asszociálja. Ezen a veleszületett emberi képességeket érti. Heller–Mönks–Passow (1993, p. 27) szerint „A szunnyadó tehetség olyan kompetencia, amely az emberi adottságok valamilyen területén vagy területein jelentősen felülmúlja az átlagot." Gagné következőképpen definiálja a megvalósult tehetséget (1990, p. 22): „különböző adottságok és interperszonális, valamint környezeti katalizátorok interakciójának fejlődési terméke."

Gagné differenciált modellje *(6. ábra)* ábrázolja, hogy a talentum különböző adottságok alkalmazása az adott területen szerzett ismeretekre és képességekre. Ez a folyamat környezeti katalizátorok (család, iskola, közösség), valamint interperszonális katalizátorok (többek között motiváció, önbizalom) segítségével jön létre. Természetesen az adottságoknak talentummá való átalakulásában nagy szerepe van a rendszeres tanulásnak, a gyakorlásnak és a képzésnek is. Gagné modelljét következőképp lehet egy konkrét példán értelmezni: Mozartnak jó kreatív és zenei képessége volt (aptitude). Ha nem lett volna elég motivációja és önbizalma (intraperszonális katalizátor), hogy ötévesen zongorázzon, hegedüljön és zenét szerezzen, akkor nem lett volna akkora zenei talentum belőle. Ezen túl a családja (környezeti katalizátor) biztosította, hogy ezt az adottságát tanulással és gyakorlással jól ki tudja fejleszteni. A tényezők ezen interakciója volt a biztosíték rá, hogy Mozart azzá a zenei zsenivé vált, akit mindnyájan ismerünk.



6. ábra. F. Gagné tehetségfejlődési modellje

2. AZ ISKOLAI TEHETSÉGGONDOZÁS FŐBB MÓDSZEREI

Amióta iskola létezik, a tehetséges tanulókra mindig is figyeltek a pedagógusok; évszázadokra visszamenő sikeres tehetséggondozó munkáról vannak adataink. Ugyanakkor az utóbbi évtizedekben a kutatók és a gyakorlati szakemberek sok olyan eszközt, módszert dolgoztak ki, amelyek a korábbiaknál hatékonyabbá tehetik az iskolai tehetséggondozást. Ezek közül három alkalmazása elengedhetetlen a sikeres tehetséggondozó munkához: a gazdagítás, a gyorsítás és az egyéni differenciálás. Ezek az alapjai a hatékony tehetséggondozásnak. A következőkben áttekintjük ezek fontosabb kérdésköreit, amelyek a gyakorlati tehetségfejlesztő munkához támpontul szolgálhatnak.

2.1. Gazdagítás, dúsítás

Tartalmi szempontból a tehetséggondozásnak a legfőbb alapelve a gazdagítás (dúsítás). Célja alapvetően az ismeretek és a műveletekre épülő képességek kötelező tananyagon túllépő fejlesztése, e nélkül nincs érdemi tehetségfejlesztés.

Passow (1958) a gazdagításnak *négy fajtáját* különítette el egymástól, ezek ugyancsak támpontul szolgálnak a sikeres, differenciált gyakorlati megvalósításhoz (idézi: Páskuné 2000, p. 200):

- *Mélységben történő gazdagítás*. Ennek során több lehetőséget kínálunk a tehetséges gyerekeknek tudásuk és képességeik alkalmazására, mint általában a tanulóknak.
- A „*tartalmi gazdagítás*” azt jelenti, hogy a tananyagot a tanulókra érzékenyen szerkesztjük meg, figyelembe véve érdeklődésüket, szükségleteiket, s ezeket közben fejlesztjük.
- A „*feldolgozási képességek gazdagítása*” elsősorban a kreatív és kritikus gondolkodás fejlesztését jelenti felfedező, illetve interdiszciplináris tevékenység közben.
- A „*tempóban történő gazdagítás*” a tehetséges gyerekek átlagosnál gyorsabb munkájára épül: ugyanannyi idő alatt többet képesek feldolgozni társaiknál, így kiegészítő elemeket is bevonhatunk a tanulási folyamatba.

2.1.1. Gazdagítási modellek

Számos szisztematikus gazdagító programmodellt ismerünk, mint például a Renzulli és Reis (1986) által kifejlesztett Gazdagító Triád/Forgóajtó Modellt, Treffinger (1986) Egyénre Szabott Programtervezési Modelljét (Individualized Program Planning Model – IPPM), a Feldhusen és Kolloff (1979, 1986), valamint Moon és Feldhusen (1991) által támogatott Purdue Háromlépcsős Modellt, a Renzulli (1994) és Feldhusen (1995) által bemutatott tehetségfejlesztési modelleket, valamint a Betts (1986) által bemutatott Autonóm Tanuló Modellt (Autonomous Learner Model). E modellek mindegyike viszonylag átfogó tervet ad a tehetséges gyermekek azonosítására és a számukra készített programszolgáltatásokra, amelyek alapvetően gazdagító természetűek. Ezek közül mi most hármat mutatunk be vázlatosan, ezek a legelterjedtebbek a pedagógiai gyakorlatban.

A Renzulli-modell talán a legátfogóbb az azonosítás, adminisztráció, tanárképzés és programmegvalósítási struktúra kiterjedt kezelésével (Renzulli 1994; Renzulli–Reis 1986). Három típusú programélmény különíthető el.

1. Az első típusú gazdagítás általános felfedező élményeket foglal magába, amely „az ismeretnek a hagyományos tantervben nem szereplő, új és izgalmas témáival, ötleteivel és területeivel" ismerteti meg a diákokat (Renzulli–Reis, 1986, p. 237).
2. A második típusú gazdagítás, a csoportos-képzés gyakorlatok, olyan tevékenységekből állnak, amelyeket a kognitív és affektív folyamatok fejlesztésére terveztek. A tevékenységeket nem csupán a tehetségesek számára, hanem minden gyermek számára lehet kínálni.
3. A harmadik típusú gazdagítás valós problémák egyéni és kis csoportos vizsgálatát követeli meg. Speciális azonosítási eljárásokat alkalmaznak a gyermekek kiválasztásához a harmadik típusú gazdagításra – különösen a gyermek nyílt viselkedésének megfigyelésén keresztül, amely tükrözi egy konkrét témához vagy projekthez kapcsolódó aktuális érdeklődését, motivációját vagy viselkedését.

A Treffinger-féle (1986) Egyénre Szabott Programtervezési Modell (Individualized Program Planning Model) hangsúlyozza az azonosítási folyamat során összegyűjtött információ intenzív használatát a tehetségesek erősségeire és érdeklődésére épülő, egyénre szabott tanulmányi programok tervezésében. A modell arra is törekvést tesz, hogy fejlessze az önállóság és az önirányítás készségeit a tehetségesekben. Arra fordítja a figyelmet, hogyan kell kezelni és ellátni a tehetségeseket egy általános osztályban.

A Betts (1986) által kifejlesztett Autonóm Tanuló Modell (Autonomous Learner Model) arra tesz kísérletet, hogy eleget tegyen a tehetségesek tanulmányi, szociális és emocionális szükségleteinek, miközben az önállóság vagy autonómia célját tűzi ki maga elé, hogy a tanulók felelőssé váljanak saját tanulmányaikért. A modell biztosítja, hogy a tanuló

1. figyelmet fordítson önmagára mint tehetséges egyénre, valamint a programlehetőségekre;
2. gazdagító gyakorlatokban vegyen részt, például vizsgálatokban, kulturális tevékenységekben és terepgyakorlatokon;
3. szemináriumokat látogasson a futurizmusról, problémákról és vitás kérdésekről;
4. a tanulási készségeket, pályaválasztási ismereteket és interperszonális képességeit egyénileg fejlessze;
5. mélyreható vizsgálatokat folytasson csoportos projektek és mentorálás keretében. Ez a modell különösen erősen összpontosít a tehetséges diákok egyéni fejlődésére.

A Feldhusen és Kolloff (1979, 1986) által kifejlesztett Purdue Háromlépcsős Modell (Purdue Three-Stage Model) alapvetően egy gazdagító modell, és leggyakrabban gyorsító programként – ezt a fogalmat részletesen később elemezzük – valósul meg. A háromlépcsős modellt számos iskolában alkalmazzák mint Tanulmányi és Kreatív Gazdagító Programot (Program for Academic and Creative Enrichment – PACE). A modellt kis létszámú osztályokban vetik be, ahol 8–15 tehetséges gyermek tanul. Az első állomás során a gyermekek egy olyan tantervet követnek, amely a gondolkodási készségekre és az alapvető tantárgyi ismeretekre összpontosít, legalább két órájuk van egy héten, és lehetőség szerint egy héten egyszer egy teljes napot együtt töltenek. A gondolkodási készségeket és a tartalmat magas szinten és gyors ütemben tanulják, amely megfelel a tehetségeseknek. A második állomás során szélesebb és konkrétabb stratégiákat tanulnak. Ezek közé tartoznak a könyvtári ismeretek, a kreatív problémamegoldás, a jövőbeli tanulmányok és a kutatási készségek – ezek mindegyike a harmadik állomás gyakorlatait készíti elő, amelyek projektorientált alkalmazások a diákok személyes érdeklődési területein. A harmadik állomás során a diákok kutatási projekteken dolgoznak, fejlődési feladatokat kapnak, és ezek a törekvések prezentációkat, produktumokat vagy előadásokat eredményeznek. A harmadik lépcsőfok a valós élet kreatív produktivitását szimulálja.

2.1.2. A gazdagítás kerete: a tehetséggondozás komplex célrendszere

Sokan foglalkoztak a tehetséggondozó programok tervezésének kérdéseivel (vö. Heller–Mönks–Sternberg–Subotnik 2000; Tóth L. 2008), azonban a gyakorlatot leginkább segítő elmélet Feger munkásságából származik (vö. Balogh–Polonkai–Tóth 1997). Az általa megfogalmazott célok – a gyermek fejlődésének szempontjára építve – teljes körűvé teszik az iskolai tehetséggondozó programokat. A szerző nézeteit a következőkben foglalhatjuk össze.

Tehetséggondozó programok nagy számának elemzése vezetett ahhoz a következtetéshez, hogy a tehetséggondozó intézkedések négy variánsa között a következő különbséget határozzuk meg:

1. a tehetséges gyermek erős oldalának támogatása,
2. a tehetséges gyermek gyenge oldalainak fejlesztése,
3. „megelőzés, légkörjavítás, foglalkoztatási terápia”,
4. olyan területek támogatása, amelyek közvetve befolyásolják a tehetség kibontakozását.

Részletesebben:

1. *A tehetséges gyermek erős oldalának támogatása.* Ezen belül azokat a szempontokat veszik figyelembe, amelyek tipikusan a különleges adottságokat fejezik ki: a gyors felfogóképességet, a jó emlékezőtehetséget, a tanulás valamely területén az intenzív és gyors elmélyülést, illetve speciális képességeket (pl.: művészetek, sport, matematika stb.).
2. *A tehetséges gyermek (tehetséggel összefüggő) gyenge oldalának kiegyenlítése.* Ezalatt „hiányosságokat” kell értenünk, amelyek a tehetség fejlődését megnehezítik, vagy éppenséggel megakadályozzák. A gyenge oldalak – általános intellektuális tehetség esetében – valamiféle kiegyensúlyozatlan tehetségprofilban nyilvánulnak meg; például egy intelligenciateszt csaknem minden résztesztjében kiemelkedő teljesítményt nyújt a tanuló, és az egész teszt gyenge eredménye *egy* részteszt következménye. Vagy az iskolában összességében kiemelkedő teljesítmény mellett egyetlen tantárgyban súlyos hiányok mutatkoznak. Problémák adódhatnak azonban a tanulási és a munkamódszerek vagy a motiváció területén is (Mező–Mező 2007). A gyenge oldalak származhatnak továbbá a kedvezőtlen környezeti feltételekből; az ilyen gyenge olda-

lak kiegyenlítésére alkalmazott segítő intézkedéseket például az ún. kompenzációs nevelés keretében hajtják végre.

További csoportot képeznek a tehetséges „alulteljesítők". Mindenesetre az „alulteljesítés" csupán egy szimptóma; meg kell állapítani, mely tényezők okozzák az alulteljesítést (Mező–Miléné 2004). Az okfeltárás azt mutatja, hogy e variáns programja számára résztvevőket felderíteni és megnyerni áldozatosabb munkát jelent, mint a tehetségesek erős oldalainak fejlesztése. A gyenge oldalakat pótlólag diagnosztizálni kell, hiszen a gyenge oldalaknak olyan sok fajtája fordulhat elő, amelyek mindegyike különböző bánásmódot igényel. Ennek alapján az a program, amely a tehetséggel kapcsolatos gyenge oldalakat akarja megszüntetni, többnyire terápiai orientáltságú és inkább pszichológiai bázisú; sőt, gyakrabban egyedi segítségnyújtásban nyilvánul meg. Fontos szerepet játszanak e problémák megoldásában a tehetség kérdésével foglalkozó tanácsadó állomások.

3. *„Megelőzés, légkörjavítás, foglalkoztatási terápia."* A „megelőzés" a tehetséges tanulóra irányul, és azt kell megakadályoznia, hogy a kedvét elveszítse, és hogy az alulkövetelés alapján aszociális magatartásmód fejlődjön ki benne. A „légkörjavítás" összességében az osztályban uralkodó szituációra vonatkozik, és azt akarja elérni, hogy az átlagot meghaladó tanuló a maga gyors és többnyire helyes válaszaival nehogy elbátortalanítsa a többieket, vagy a tanárt bosszantsa azáltal, hogy a didaktikai koncepcióját túl gyorsan átlátta valaki.

4. *Olyan területek támogatása, amelyek közvetlenül nem hatnak a gyermek tehetségének fejlesztésére.* Itt ismét egy olyan csoport található, amelyet valamely ismertetőjegy alapján (mint magas intellektuális képesség, zenei adottság, sportbeli képesség) hoztak létre, ezt követően azonban a gondozás olyan területeken történik, amelyekben a csoportalakító ismertetőjegyek jelentéktelenek. Például a kiemelkedő intellektuális képességekkel rendelkező gyermekeket festészetben, táncban vagy sífutásban „támogatják". Ilyesfajta tehetséggondozást találunk gyakran a szülői egyesületek tevékenységében.

2.1.3. A gazdagítás gyakorlati fogásai az oktatásban

Amint azt az előzőekben kifejtettük, a gazdagítás a tehetséges tanulók számára elsősorban a megszerzett ismeretek átgondoltabb, magasabb szintű feldolgozására, a gyakorlati alkalmazására való előkészítést jelenti, a korábban bemutatott modellek egyértelműen megfogalmazzák ezeket. A magyar iskoláknak pedig éppen ezekben van pótolnivalójuk, ezért a következőkben olyan kérdésköröket tekintünk át, amelyek segítik a gyakorló pedagógusoknak a gazdagítás tanórai megvalósítását.

2.1.3.1. A tanulók irányítása a problémamegoldó technikák alkalmazása során

Ha nem volnának megoldásra váró problémák, az élet sokkal könnyebb volna a modern társadalomban, de egyben végtelenül unalmas, és kihívások nélküli is lenne. Tanítványaink rengeteg problémával fogják szembetalálni magukat: részben a mindennapi megélhetés személyes gondjaival, részben társadalmiakkal, amelyek így vagy úgy folyton hatással vannak ránk, és természetesen olyan problémákkal is, amelyek többé-kevésbé együtt járnak minden foglalkozással.

A pedagógusok feladata az, hogy segítsék a tanulókat tudásuk, jártasságuk és a helyes élethez, a társadalomban végzett hatékony munkához elengedhetetlen attitűdök fejlesztésében. Az egyik legfontosabb dolog, amit a diákoknak el kell sajátítaniuk, hogy miként oldjanak meg önállóan egy-egy problémát – azért, hogy később képesek legyenek a legkülönbözőbb helyzetekre szabott problémamegoldó technikákat alkalmazni a személyes és a munkahelyi életükben.

A problémák megoldása nem egyszerű vagy természetes folyamat, nincs a génjeinkbe írva, és nem is csupán a „józan ész" használatának kérdése. A hatékony problémamegoldó technikák megtanulhatók, következésképpen taníthatók is. Ha minden kérdésre egyszerűen a helyes válaszokat adjuk meg a diákjainknak, vagy egy minden problémára alkalmazható, könnyű győzelmet ígérő megoldással látjuk el őket, nem adjuk meg nekik az alkalmat arra, hogy tanuljanak és gyakorolják a problémamegoldó fogásokat. Ha új problémával vagy döntéshelyzettel szembesülnek, nem fogják tudni, hogyan közelítsenek hozzá, vagy hogy hogyan jussanak ésszerű következtetésre.

Az élet számos helyzete problémákat vet fel, amiket meg kell oldani. A probléma bármilyen szituációban jelentkezik, feszültséget vagy bizonytalanságot kelt, és ez valamilyen kreatív vagy logikus megoldást igényel. Ahhoz, hogy a feladatokkal meg tudjunk birkózni, egy racionális és tervszerű megközelítés szükséges – olyan, amely megoldásokat ad ezekre a problémákra.

Az egyik általánosan használt technikát, amelyet ilyen problémák esetén alkalmaznak, problémamegoldásnak hívják. Ez az eljárás az információk összegyűjtését, hasznosítását és ellenőrzését kívánja meg a célból, hogy meghatározhassuk a megfelelő megoldást egy létező problémára. A problémamegoldó megközelítés egy szisztematikus folyamat, amely a következő alaplépéseket foglalja magában:

1. A probléma pontos és világos megfogalmazása.
2. A tárgyhoz kapcsolódó tényezők felismerése.

3. A szükséges információ összegyűjtése.
4. A lehetséges megoldások megvizsgálása.
5. Próbamegoldások kiválasztása.
6. A javasolt megoldások kipróbálása, ellenőrzése.
7. Eredmények értékelése.

A problémamegoldás használata mint iránymutató eljárás számtalan előnnyel szolgál a pedagógus számára. Fejlesztheti a tanulási motivációt úgy, hogy a tanulókat a probléma önálló megoldására készteti, vagy olyan problémák felvetésével, amelyek őket érdeklik. Serkentheti a tanulókat arra, hogy saját tudásukat és képességeiket használják. A legtöbb feladat a tanulók képességeinek és tudásának széles körét veszi igénybe. Ehhez a tanulóknak tapasztalatokkal kell rendelkezniük arról, hogyan alkalmazzák tudásukat az új problémákkal kapcsolatban.

A problémamegoldó technikák csoportos használata bátoríthatja a tanulók aktív részvételét, és fejlesztheti a hatékony tanár–diák munkakapcsolatot. Hasznos lehet a tanulók tudásszintjéhez igazodó beszélgetések kezdeményezéséhez. Az aktív részvételt biztosító közös csoportos megbeszélések, amelyek során a tanulók a tanárt a csoport tagjaként szólítják meg, segíthetik a tanulókat a probléma megfogalmazásában.

2.1.3.2. Szóbeli kérdezési technikák

„Jól kérdezni annyi, mint jól tanítani." Szókratész egyetértett volna ezzel az állítással. Szókratész a kérdezésen kívül más eljárást nem használt. A tanításban ma, bármennyire megismertük, a szóbeli kérdezés egy a néhány lényeges tanítási eljárás közül. A szóbeli kérdezés egy eredményes út ahhoz, hogy ösztönözzük a tanuló motivációját és részvételét. A kérdezés támpontot ad a tanulók érdekeltségéhez. Ráadásul, erre összpontosíthatjuk a tanuló figyelmét és fejleszthetjük érdeklődését és kíváncsiságát.

A szóbeli kérdezési technikák eredményes használata lehetőséget nyújt a tanulóknak az önkifejezés gyakorlására, ugyanakkor megengedi változatok hozzáadását a tanítási órához. A logikai sorrendben feltett kérdések ösztönzik a logikus és kritikus gondolkodást, és gondolkodási képességhez vezetnek. A kérdések alkalmazása a tudás különböző szintjeinek megfelelően a tanulókat a gondolkodás más-más szintjeire vezeti.

Egy fontos eredménye a kérdések alkalmazásának az, hogy felfedezhetjük az egyes tanulók speciális képességeit és érdeklődési körét. A tanulók gyakran tesznek szert speciális tudásra és képességekre a hobbijukon, munkatapasztalatukon vagy családi tevékenységükön keresztül. Tudnunk kell használni ezeket a speciális képességeket és érdeklődéseket mint további eszközöket a tanulás elősegítésére.

A szóbeli kérdezési technikákat az alábbi célokra kell tudnunk használni:

- Bevezetni, összegezni vagy újratekinteni egy leckét.
- Az előzők eredményét tisztázni.
- Felfedezni a hiányosságokat.
- A központba állítani az olvasottakat.
- Fejleszteni a tanulók éleslátását.
- Elősegíteni a tanulók megértését.
- Fejleszteni a tanulók értékeit és szemléletét.
- Megtanítani a diákoknak, hogy használják saját elképzeléseiket ahelyett, hogy memorizálnák a dolgokat.

A szóbeli kérdések köre lényeges kiértékelési információt tud nyújtani. Tesztelhető a tanuló felkészültsége a tananyagból (kérdéseken keresztül meg tudjuk állapítani, hogy elolvasta-e és megértette-e az anyagot). A kérdések során a lecke bevezetése, ismertetése előzetes tesztként szolgálhat a tanulók tudásának felméréséhez.

A kérdések használata közben a leckék egyben azonnali visszajelzést szolgáltathatnak arról, hogy a tanulók hogyan fejlődnek. Bejegyezve a kérdéseket a lecke összefoglalójába, majd az újranézés adhat egy részleges értékelést a tanulók által teljesített tanulmányi célokról.

2.1.3.3. Gazdagítási lehetőségek a „brainstorming", „buzz-csoport" és „kérdésdoboz" segítségével

Ezeket a technikákat a csoportos tanulás, feladatmegoldás megkönnyítésére tervezték. E módszerek azáltal, hogy aktivizálják, illetve involválják a diákokat, elősegítik a kreatív gondolkozás képességének fejlesztését.

Brainstorming

A brainstorming technikája a kreativitást, illetve a diákok bevonását segíti elő a tanulási helyzetben. Gyakran használják tervezési technikaként. A diákok először is a brainstorming segítségével alternatív javaslatokat tesznek, amit aztán a tanulási helyzetek megtervezésénél lehet felhasználni. Akkor a leghatékonyabb, ha a csoport nem túl nagy (12–15 fő a legelőnyösebb), így mindenkinek lehetősége nyílik, hogy azonos mértékben vegyen részt a rövid idő során (kb. 10-15 perc).

A brainstormingot egy *vezetőnek* kell irányítania. Ezek lehetünk mi, a tanár, vagy a csoport által kiválasztott diák. Továbbá szükség van egy *jegyzőre*, aki a javasolt alternatívákat jegyzi le. Ezt a személyt mi vagy a csoporttagok választják ki.

Igyekezzünk minél specifikusabb témát választani a brainstorming-ülés számára. Ez segíteni fogja a diákokat a téma szétfolyásának megakadályozásában. Ugyanakkor meg kell győződni arról, hogy a téma elég érthető a diákok számára ahhoz, hogy meg tudjanak birkózni vele. Bármilyen témát választunk, a brainstorming-ülés előtt alaposan el kell magyarázni a diákoknak. A kezdeti brainstorming-ülés célja nem egy komplex probléma megoldása, hanem olyan friss ötletek összegyűjtése, amelyekből a későbbi tervezés táplálkozhat.

A brainstorming alatt az értékelés és a kritika nem megengedett. Az ötletek elbírálására később kerül sor. Minden, témához tartozó ötletet szívesen fogadunk. Az alternatív válaszok sokszínűsége a hatékonyabb tervezést segíti elő. A résztvevőket megkérjük arra, hogy minél spontánabb módon reagáljanak, a válaszaik „minőségét" ne nagyon mérlegeljék.

A diákoknak el kell magyarázni a brainstorming célját, és hogy az aktuális ülés hogyan működik. Természetesen a könnyebb megértés kedvéért lehet egy próbát is tenni. Figyelmeztethetjük őket az esetleges kelepcékre is. Mások javaslatának leszólása és a bekiabált kritikák alááshatják a brainstorming folyamatát, és elvehetik mások önbizalmát.

A vezető felelőssége az aktuális brainstorming-ülés figyelemmel kísérése. A vezetőnek amennyire csak lehet, a háttérben kell maradnia, de ha kell, ötletekkel kell serkentenie a gondolkodást és a válaszokat. Vigyázni kell, hogy minél kevesebb negatív vagy értékelő közbeszólás hangozzon el.

A diákok megfelelő ráhangolása a brainstorming folyamatára elősegíti, hogy az ülés ne csússzon ki a kezünkből.

Elősegíti, hogy (1) a diákok komolyan vegyék a témát, (2) a diákok ne tévesszék össze a spontaneitást ostobaságokkal (képtelenségekkel), (3) és hogy ne csak pár diák domináljon az ülés alatt. Ha csak pár ember ontja magából az ötleteket, néha egy-két biztató pillantás is aktivizálhatja a csendesebb diákokat.

A jegyzőnek az a feladata, hogy a brainstorming-ülés alatt elhangzó javaslatokat lejegyezze. Általában a táblára szokták feljegyezni az ötleteket, hogy mindenki számára látható legyen, illetve a későbbi értékelés során legyen mire támaszkodni.

Miután vége a brainstorming-ülésnek, megkérjük a jegyzőt, hogy számoljon be az elhangzott javaslatokról. Ez történhet írásban és szóban is.

A brainstorming technikának vannak korlátai, de ezek körültekintő tervezéssel és vezetéssel könnyen leküzdhetők. A folyamat eredményessége attól függ, hogy a diákok hogyan voltak orientálva az adott folyamatra és témára.

A brainstorming technikának a résztvevőkre gyakorolt stimuláló hatása sokszor fontosabb, mint azok az ötletek, amelyeket e módszer segítségével kapunk.

„Buzz-csoport"

Az egyik leggyakrabban használt, tanulást segítő technika a „buzz-csoport". Ezt a módszert eredetileg a Philips cég fejlesztette ki, ezért azóta gyakran „Philips 66" módszerként emlegetik, ugyanis alkalmazásakor 6 percre és egy 6 tagú csoportra van szükség.

Ahhoz, hogy a diákokat minél jobban bevonjuk a megbeszélésbe, illetve minél többen tanuljanak az elhangzott javaslatokból, az osztályt 6 fős csoportokra lehet osztani. Először is el kell magyarázni a csoportnak a kérdést, amelyet majd meg kell válaszolniuk. Fontos, hogy meggyőződjünk arról, mindenki megértette a megvitatandó kérdést. Ha nem mindenki értette meg, akkor ebből a továbbiakban még sok probléma származhat.

Ha például a diákok bizonytalanok abban, hogy a vita tárgya az, hogy milyen legyen az iskolai egyenruha, vagy hogy van-e joga az iskolának egyenruha viselését előírni, akkor a legtöbb idő arra megy el, hogy eldöntsék, egyáltalán melyik kérdést kell megvitatni, ahelyett, hogy magával a témával foglalkoznának.

A választott témának jól behatárolhatónak kell lennie ahhoz, hogy minden aspektusát meg lehessen vizsgálni. Ugyanakkor egyszerűnek kell lennie, hogy a rendelkezésre álló rövid idő elegendő legyen a diákoknak a téma megvitatására.

Meg kell kérni minden csoportot, hogy válasszon egy vezetőt és egy jegyzőt.

A diákok értékes tapasztalatot nyerhetnek egy kompetens vezető és jegyző kiválasztásával, ami ugyanakkor felelősség is. Lehetnek azonban olyan esetek is, amikor nekünk kell közbelépni. Például vannak olyan gyerekek az osztályban, akiket sohasem választanak vezetőnek. Mi viszont megadhatjuk ezeknek a diákoknak a lehetőséget arra, hogy fejlesszék vezetői potenciáljukat, vagy gyakorolják a csoporthoz való beszéd képességét.

A diákoknak előzetesen fel kell hívni a figyelmét a vezető és a jegyző felelősségteljes munkájára. Meg kell érteniük, hogy a vezető feladata, hogy a csoport a témánál maradjon, illetve minden csoporttag részt vegyen a vitában. Ugyanakkor ki kell emelni a jegyző munkájának fontosságát is, ami a megvitatott kulcspontok és a meghozott döntés pontos lejegyzéséből, illetve ezen információk egész csoportnak való felolvasásával jár.

A vitának az előzetesen megbeszélt rövid idő alatt kell lezajlania.

A vezetőnek biztatnia kell a kevésbé agresszív diákokat, hogy vegyenek részt a vitában, nehogy néhány, jó verbális képességekkel rendelkező diák átvegye az irányítást a vitában, és így megakadályozza a csoportinterakciót.

A vita alatt jó, ha körbejárunk a csoportokon és figyeljük a folyamatot. Ha szükséges, egy-két szóval biztathatjuk a vezetőt, hogy figyeljen oda minden csoporttag részvételére, vagy hogy irányítsa vissza az eredeti témához a csoportot.

Miután lezárjuk az ülést, megkérjük a csoportok jegyzőit, hogy összegezzék csoportjuk vitáját az egész osztály számára. A „buzz-csoport" jó módszer arra, hogy az egyéni részvételt és a kreatív gondolkodást serkentsük minden egyes csoporttagban, illetve a diákok közötti interakciót fejlesszük.

Kérdésdoboz

A kérdésdoboz érdeklődést stimuláló technika, amelynek több alkalmazási lehetősége van, mint azt általában gondolnánk. Viszonylag könnyen alkalmazható eszköz, amelyet egy kreatív tanár különböző szituációkhoz igazítva variálhat.

A diákokat arra biztatjuk, hogy írják le egy bizonyos témával kapcsolatos kérdéseiket, és helyezzék el egy dobozban egy meghatározott időben. Ez a technika különösen akkor hasznos, amikor egy későbbi vitához akarunk kérdéseket gyűjteni és kevés időnk van, illetve a diákoknak időre van szükségük kérdéseik átgondolásához.

Ugyanakkor a kérdésdoboz technika lehetőséget ad a diákoknak arra, ha névtelenül kívánnak közreműködni. Így nem kell zavarba jönniük a javaslataik miatt, vagy hogy a csoport előtt kell beszélniük. Egy meghatározott időben a válaszokat összegyűjtik és rendezik a további felhasználáshoz.

Amikor a kérdésdoboz technikát használjuk, fontos, hogy a diákok megértsék, miért tesznek fel kérdéseket (milyen célok elérésében segíti őket ez a technika) és mit kell tenniük. Ha nincsenek megfelelően tájékoztatva, lehet, hogy egyáltalán nem válaszolnak, vagy esetleg a tárgyhoz nem kapcsolódó kérdéseket tesznek fel. Például lehet, hogy állításokat írnak fel, amikor kérdéseket kellett volna feltenniük a megfelelő embernek.

A kérdésdobozt a következő formákban használhatjuk:

- A diákok feltett kérdéseit a későbbiekben egy szakember fogja megválaszolni. A kérdéseket csoportosítva átadjuk a válaszadónak, aki így hatékonyabban tervezheti meg válaszait.
- A névtelenül leírt álláspontokat később kezdő lépésként egy vitában felhasználhatjuk.
- A diákok válaszaikat két dobozban is elhelyezhetik: egyikbe a „mellette", a másikba az „ellene" szóló megjegyzéseket tehetik. Ez megkönnyíti az összegzést, illetve gondolkodásra és döntésre ösztönzi a diákokat a válaszadás előtt.

2.1.4. Tantervkészítés tehetségeseknek

A tehetségesek számára megfelelő tanterv összeállításának lehetőségét vizsgálva számos kérdést érdemes feltenni. Ezeket a kérdéseket alaposan meg kell fontolni, mielőtt továbblépünk a tanterv kialakításában (Polonkai 1999; VanTassel-Baska 1993):

1. Mi legyen a tehetségesek számára összeállított tanterv *tartalma*? Anyagában is másnak kell-e lennie a többi tanuló tantervénél, vagy csupán másképp kell felépíteni? A tehetségesek tantervének összeállítását a nemzeti szabványnak kell-e befolyásolnia, vagy ettől eltérő úton kell haladnia?
2. Hogyan kezeljük a kritikus és a kreatív gondolkodást, a problémamegoldást és a döntéshozatalt – mint önmagukban álló tartalmakat, vagy mint a már meglévő tartalmi területek fedőrétegét?
3. Meg tudjuk-e határozni kellő pontossággal és egyértelműen, hogy mit értünk a tehetségesek számára összeállított tanterv „megkülönböztetésén”?
4. A tanulók mely csoportjának tervezzük a tantervet – csupán a magas szinten teljesítők számára, vagy a diákok egy szélesebb skálájának, akik annyira eltérőek lehetnek profiljukban, hogy az élmények egy megtervezett csoportja esetleg nem megfelelő a szükségleteiknek?
5. Hogyan állíthatjuk sorba a tanterv élményeit úgy, hogy azok maximális tanulást biztosítsanak a tanulók számára?
6. Hogyan tudjuk a lehető leghatékonyabb változtatásokat végrehajtani a tehetségesek tantervében – új tanterv kifejlesztésével és alkalmazásával, képzéssel, vagy a tanterv alkalmazásának megfigyelésével?

A tehetséges tanulók számára megfelelő tanterv készítéséhez holisztikusan kell foglalkozni az elméleti alapelvek megfelelő gyakorlatba történő átültetésének kérdésével, vagyis, hogy a tehetségesek oktatása teljes, ne töredezett legyen. Ezt akkor érhetjük el, ha az alábbi legfontosabb elemekre összpontosítunk:

1. A tehetséges gyermekek a többi gyermektől eltérő ütemben tanulnak, és ennek az ütemnek az összehangolása kulcsfontosságú a fejlődésük szempontjából (Keating 1991). Továbbá, az ütem vagy a haladási sebesség eltérései olyan nagyok lehetnek, hogy megkülönböztetést tesznek szükségessé a képzés típusában és fokában is.

2. A tehetséges gyermekek a tanulás kulcsterületein *mélységre* vágynak. A pedagógusok ezt a szükségletet az „ismeretgyarapítással" elégítették ki, amely általában a tanterv egy felületes kelléke. A mélység kérdését nem lehet ebből a megközelítésből megoldani. Azonban meg lehet oldani úgy, ha a tanulás kulcsfontosságú területeit megvizsgáljuk lényegük, magjuk és hozzátartozó fogalmaik tekintetében, és a tehetséges gyermekekkel együtt szókratészi eszközökkel feltárjuk, hogy melyek ezek a kulcsfogalmak, és hogyan kapcsolódnak a tanulás területeihez. A tehetséges gyermekeknek szükségük van arra a kihívásra és ösztönzésre, hogy együtt töltsék minden iskolai nap legalább egy részét, olyan elvárási szintekkel, amelyek elég magasak ahhoz, hogy potenciális képességeiket próbára téve megpróbáljanak eleget tenni azoknak. A magas elvárási szint nem azt jelenti, hogy több munkát várnak el alacsonyabb nehézségi szinten, hanem inkább vég nélküli munkát a működés összetett szintjein. Ebben az értelemben a tehetségesek számára az értelmes feladat az, amely egyre több feltárásra váró kérdést vet fel, és folyamatos vizsgálathoz vezet egyéni vagy kis csoportos foglalkozásban. Ezeket az elvárásokat csak olyan környezetben lehet felállítani és működtetni, ahol a gyermekek hasonló képesség- és megértési szinten vannak. Így tehát a tehetséges gyermekek csoportosítása kulcsfontosságúvá válik.

A tehetséges gyermekeknek iskolai éveik alatt végig szükségük van programokra és szolgáltatásokra. Tehetségük gyakran már hároméves korban megnyilvánul, és folyamatos ápolást igényel ettől az időtől kezdve.

VanTassel-Baska (1993) megalkotta a tantervalapelvek listáját, amelyek közül néhány általános, néhány a tehetségesek számára megfelelőnek ítélt konkrét tantervi megfontolásokat tükröz.

A tehetségprogramok kidolgozásához használatos tantervi alapelvek listája

Általános alapelvek

1. Folytonosság – a tanulási tevékenységek egy jól körülhatárolt csoportja, amely megerősíti a konkretizált tantervi célt.

2. Sokféleség – egy konkretizált tantervi kereten belül meghatározott célok elérésére szolgáló alternatív eszközök kínálata.

3. Integráció – minden képesség integrált alkalmazása, beleértve a kogníciót, az érzelmeket és az intuíciót.

4. Lényegi tanulás – a tanuló és a tantárgy szempontjából lényeges anyag, készségek, eredmények és tudatosság befoglalása.
5. A jó tanítási/tanulási metodológiákkal való egyezés – különböző tanítási gyakorlatok befoglalása, amelyek figyelembe veszik a motivációt, a gyakorlatot, a képzés átirányítását és a visszajelzést.
6. A társakkal és fontos egyénekkel való kölcsönhatás – lehetőség az olyan emberekkel való találkozásra, vagy a róluk való tanulásra, akik ugyanazzal vagy más tehetséggel rendelkeznek.
7. Értékrendszer – állandó lehetőség biztosítása a személyes és a szociális értékek kialakítására és vizsgálatára, valamint a személyes értékrendszer kialakítására.
8. Kommunikációs készségek – verbális és nem verbális rendszerek és készségek kifejlesztése az elképzelések megvitatására, megosztására és kicserélésére.
9. Többszörös erőforrás – változatos anyagi és emberi erőforrások biztosítása a tanulási folyamat részeként.

A tehetségesek tantervének speciális alapelvei

1. Testreszabottság – a tehetséges diákok képességeinek, érdeklődésének, szükségleteinek és tanulási stílusának felmérésére épülő tanterv.
2. Nyitottság – az előre felállított elvárások megszüntetése, amelyek korlátozzák a tanulást a tantervi kereteken belül.
3. Függetlenség – lehetőség bizonyos típusú önálló irányítású tanulásra.
4. Komplexitás – lehetőség ismeretrendszerek, mögöttük meghúzódó alapelvek és fogalmak, valamint a diákok tanulmányaihoz szorosan kapcsolódó kulcsfontosságú elméletek megismerésére.
5. Tárgyak között átívelő tanulás – lehetőség a tanulás más tudásterületekre, új helyzetekre stb. történő átirányítására.
6. Döntéshozatal – segítség a diákok számára megfelelő/releváns döntések meghozatalához, a tanulandó dolgokra és a tanulás módjára vonatkozóan.

7. Alkotás/újraalkotás – segítség a kreatív folyamatok alkalmazásában a már megszületett alkotások fejlesztésére és módosítására, valamint a fennálló elképzelések megkérdőjelezésére és megfelelőbb megoldások találására.
8. Időzítés – a tanulási tevékenységre szánt idő rövidebb/hosszabb szakaszokra való felosztása, amely megfelel a tehetséges tanuló tulajdonságainak.
9. A tartalom akcelerált/haladó ütemezése – lehetőség a tehetséges diákok gyorsaságának és rátermettségének kibontakozására az új anyag elsajátításában.
10. Gazdaságosság – a tananyag összesűrített és modern megszervezése, hogy megfelelő legyen a tehetséges diákok kapacitásának.
11. Kihívás – magas szintű tanulási élmény biztosítása, amely megköveteli a tehetséges diákoktól, hogy kiterjesszék megértésüket.

2.2. Gyorsítás

Már a gazdagítás Passow által kidolgozott és fentebb bemutatott rendszerében feltűnt a „tempóban történő gazdagítás", amely arra épül, hogy a tehetséges tanulók gyorsabban, többet képesek feldolgozni, teljesíteni. Ezt a szempontot kiterjesztették a tehetséggondozás egész rendszerére, s így jött létre a *gyorsítás* fogalma. Ennek lényege, hogy a tehetséges tanulók általában gyorsabban fejlődnek, mint társaik, s ezért biztosítani kell részükre azokat a kereteket, amelyek lehetővé teszik az egyéni tempóban (gyorsabban) való haladást. Sokféle formája alakult ki a gyorsításnak, itt a legfontosabbakat soroljuk fel *Feger* (1997) összegzése alapján.

- *Korábbi iskolakezdés.* Nagy különbségek lehetnek a fejlődésben már a gyerekkorban, s ez alapján nemegyszer előfordul, hogy az általánosan szokásos életkor (6–7 éves kor) előtt elkezdi a gyerek iskolai tanulmányait. Természetesen körültekintő iskolaérettségi vizsgálatok jelentik a garanciát a tévedés elkerüléséhez.
- *Osztályátléptetés.* A gyorsabb fejlődés és az ehhez kapcsolódó nagyobb teljesítmény az iskolai évek alatt is jellemezhetik a tehetséges tanulókat. Ha ez minden tantárgyban jellemzi a diákot, és idő előtt képes a követelményeket teljesíteni, akkor élni kell ezzel a lehetőséggel is.
- *D-típusú osztályok.* Ezek lényege, hogy összeválogatott tehetséges gyerekekkel rövidebb idő alatt (például négy év helyett három év alatt) teljesítik

az általános iskola felső tagozatának tantárgyi követelményeit (vö. Nagy 2000).

- *Tanulmányi idő lerövidítése.* A tehetséges diák folyamatos magas szintű teljesítménye lehetővé teszi azt is, hogy az egész iskolai időt (8 év, 12 év) rövidebb idő alatt teljesítse.
- *Egyetemi tanulmányok idő előtti elkezdése.* Ez két formában is lehetséges. Az egyik, hogy a tanuló tanulmányi ideje lerövidítésével a szokásos életkor előtt teljesíti a középiskolai követelményeket, s így hamarabb felvételt nyerhet a felsőoktatásba. A másik lehetőség, hogy egy-egy speciális szakterületen (pl. matematika, zene) a középiskolai tanulmányok mellett már folytatja az egyetemi tanulmányait is.

A tehetséggondozás hatékonyságának növeléséhez nagyobb gondot kell fordítani ezekre a formákra is, hiszen ellenkező esetben akadályozzuk a tehetség kibontakozását. A gyorsítás egyszerűen az az elhatározás, hogy ne a kor legyen az a kritérium, amely meghatározza, hogy egy egyén mikor férhet hozzá a konkrét tantervi vagy tanulmányi tapasztalatokhoz. Ezt az alapelvet helyeslik és megkérdőjelezhetetlenül alkalmazzák is a művészetek és a sport területén. Nagyon kevés zongoraóra vagy síoktatás szól például csupán nyolcéveseknek. A kor szerinti oktatási csoportosításról ezeken a területeken nem is hallottak. Ehelyett az oktatók megpróbálnak rájönni, hogy a gyermek mit tud, és mit nem, majd ezek után kezdenek el dolgozni velük olyan szinten, amely egy picivel meghaladja tudásszintjüket; azon a szinten, amelyen az oktatási és fejlődéspszichológia területén végzett kutatások szerint az emberek a legjobban képesek tanulni (Benbow 1991). Ezeken a területeken nem hallhatunk aggodalmas hangokat a képesség szerinti csoportosítás miatt. Akkor miért aggódunk annyit a kompetencia alapján történő csoportosítás miatt, amikor a szóban forgó terület az olvasás vagy a matematika? Minden hasonló korú gyermeket egy olvasáscsoportba tenni hasonló ahhoz, mint amikor ugyanolyan méretű cipőt veszünk minden hasonló korú diáknak. Az emberek nem ennyire egyformák. Minden korban nagymértékben különbözünk egymástól méretben, fizikai és szellemi fejlődésben, érettségben stb. Ha azt akarjuk, hogy az oktatás hatékony legyen, a pedagógusoknak reagálniuk kell ezekre a különbségekre (Benbow–Lubinski 1994; Lubinski–Benbow 1995).

2.3. Hatékony differenciálás a tehetséggondozásban

A differenciálás magától értetődően alapvető aspektusa a hatékony tehetséggondozásnak (Polonkai 2002). A jó képességű gyerekek is igényelnek módosítást a standard tantervhez képest, a kiemelkedő képességűeknek pedig a normától lényegesen eltérő feladatokra is szükségük van. Az óraterv készítésekor a tanárnak érdemes az órán nyújtott különböző teljesítményre is felkészülnie a különböző adottságok és képességek függvényében. A feladatok kialakításával ösztönöznie kell a gyerekeket minél jobb teljesítményre. Ennek a módszernek azért van különös jelentősége, mert vannak olyan osztályok, ahol arra fektetik a hangsúlyt, hogy minden gyerek egy minimumszintet teljesítsen, ezért a legtehetségesebbek is ugyanilyen alacsony szinten teljesítenek. A differenciálás sok figyelmet kap az oktatás világában, és lényegében az egyéni különbségek felismerésére való törekvést és olyan szervezeti stratégiák keresését, alkalmazását jelenti, amelyek szem előtt tartják az egyéni különbségeket a fejlesztési folyamatban, ugyanakkor az integráció fejlesztési elvére is tekintettel vannak (Turmezeyné 2008). A napjainkban elterjedt új fogalom, az adaptív oktatás is erre épül. Ahogy ezt M. Nádasi Mária (2001), a szakterület kiváló hazai kutatója megfogalmazta: „A differenciálás és az egyéni sajátosságokra tekintettel szervezett egységes oktatás együttes alkalmazása közös terminológiával adaptív oktatásnak nevezhető." (i. m., p. 40).

2.3.1. A differenciálás alapjai a tanulói személyiségben

Minden tanuló másfajta személyiség, így valójában minden személyiségjellemzőt figyelembe kellene vennünk a differenciált képességfejlesztéshez. Ez azonban a gyakorlatban kivitelezhetetlen, így *célszerű a személyiségelemek szűkebb körét megjelölni*. Természetesen azokat, *amelyek kellő kapaszkodókat jelenthetnek a differenciáláshoz a tanítási-tanulási folyamatban* (vö. M. Nádasi 2001).

A) *Az új ismeretek feldolgozásához vagy az ismeretek alkalmazásához szükséges tudás, műveleti képességek színvonala*. Bizony itt széles a skála. Egyik oldalon vannak azok a tanulók, akik megfelelő ismeretekkel és műveleti készséggel rendelkeznek. A másik végpontot azok jelentik, akiknek komoly hiányosságaik vannak, olyannyira, hogy az önálló feldolgozás útján elindulni sem képesek. A kettő között további csoportok találhatók – a hiányosságok mértékétől függően. *A gyakorlatban ez a szempont érvényesül a legtöbbször*, további lényeges elemek már kevésbé felismerhetők.

B) *A tanulásra való készenlét sajátosságai*. Óriási különbség van a tanulók között abból a szempontból, hogy mennyire készek részt venni a tanítási-tanulási folyamatban. A tanulók egy része motivált a tanulásra, de sokan vannak, akikben alig van hajlandóság e munkára. Ez utóbbinak sokféle oka lehet. Bár ezekkel most nem foglalkozunk részletesen, mégsem szabad e tényezőt figyelmen kívül hagyni. *Biztos, hogy nem lehet sikeres a képességfejlesztés, ha nincs meg a tanulóban a tanuláshoz való megfelelő viszony.* Nincs más megoldás, mint a nehezen aktivizálhatóknál fokozni az egyedi érzékenységet, motiváltságot (Balogh 2004, 2006).

C) *Az önálló munkavégzéshez szükséges feltételek megléte a tanulóban.* Nagyon fontos szempont ez a differenciáláshoz, hiszen *hiába akarjuk önállóan dolgoztatni a gyereket – bár ez a differenciálás egyik legfőbb munkaformája –, ha hiányoznak ehhez a feltételek.*

Természetesen itt is széles a skála az önálló munkára képesek csoportjától a rendszeres segítségre szorulókig. Melyek a *főbb paraméterek ezen szempont megítéléséhez?*

- Feladatértési képességek szintje.
- Feladatmegoldó műveleti képességek fejlettsége.
- Jártasság a munkaeszközök használatában.
- Problémahelyzetben hogyan viselkedik a tanuló?
- Törekszik-e a gyerek a javasolt munkamenet megtartására?
- Egyéni munkatempó.

Ezeket a jellemzőket az előzetes iskolai tapasztalat döntően befolyásolja, ettől függ elsősorban a fejlettségük. Ez a tény arra is felhívja figyelmünket, hogy *nemcsak bemérni, hanem folyamatosan fejleszteni is kell ezeket a személyiségjellemzőket a tanítási-tanulási folyamatban*.

D) *Fejlettség az együttműködés terén, a társas helyzet jellemzői.* A differenciálás lehetőségeit – különösen annak csoportos formáit – az is befolyásolja, hogy milyen fejlettek a tanuló szociális képességei, és hogy hol helyezkedik el az osztály szociometriai struktúrájában. Ezzel összhangban célszerű megválogatni a differenciálás formáit, eszközeit.

2.3.2. A differenciálás általános eszközei

A tanítási-tanulási folyamatban alkalmazható eszközöknek, módszereknek gazdag a tárháza, s ezeknek ma is jól hasznosítható összefoglalását adja Petriné és Mészölyné (1982) a „Differenciált osztálymunka, optimális elsajátítás a gyakorlatban" című könyvben. Az *1. táblázat*ban bemutatott differenciálási formák a tanulók minden rétegénél jól használhatók a hatékony fejlesztéshez; természetesen vannak a tehetségesek számára kitüntetett formák, ezekkel a későbbiekben részletesen is foglalkozunk.

1. táblázat. A differenciálás általános eszközei

DIFFERENCIÁLÁSI MÓDOK, ESZKÖZÖK																	
	Differenciált csoportmunka										Információhordozók – eszközök						
Rétegmunka	csoport: heterogén	csoport: homogén	Individualizált munka a tanítási órán	Differenciált házi feladat	Differenciált motiváció	Segítségadás más tanulóknak	Feladat: információhordozó készítése	Korrepetálás a tanórán kívül	Vezető a csoportmunkában	Differenciált értékelés (M = min.; 0 = opt.)	Könyvtár, könyv	Gyűjtőmunka	Feladatlap	Diák, képek	Magnetofon	Írásvetítő	Fejhallgató
1. Ha kiváló a tantárgyból:																	
X		X	X	X		X	X		X	0	X	X					
2. Ha gyenge a tantárgyból és negatív munkaképességű:																	
X	X	X	X	X	X			X		M			X	X	X		X
3. Ha valamely alapképesség színvonala alacsony (pl. olvasás, írás, beszéd stb.):																	
		X	X	X	X			X					X		X		X
4. Ha kreatív tanuló:																	
				X	X		X										
5. Ha jó képességű, hiányos munkaképesség-színvonalú:																	
				X	X	X	X		X	0	X	X					
6. Ha gyengébb képességű, szorgalmas:																	
	X		X	X	X			X		M			X		X	X	X
7. Ha tanulási problémával küzdő:																	
	X		X		X			X					X	X	X	X	X
8. Ha más tantárgyból kiváló (pl. rajz, földrajz stb.):																	
				X	X		X					X					
9. Ha szociális körülménye problémás:																	
	X				X						X						
10. Ha speciális területen van hiányossága (pl. figyelem, emlékezet stb.):																	
			X	X									X		X		X

Megjegyzés: a Petriné és Mészölyné (1982) kutatásaiból átvett táblázatot formailag módosította Mező (2004).

2.3.3. A tehetségesek differenciált fejlesztésének problémái

A tehetségesek differenciálásának vitatémáját a szakmában és azon kívül dolgozó oktatók nagyon különbözőképpen fogják fel. A fogalom egyik gyakori félreértése, hogy a tehetséges tanuló a többi diáktól teljesen eltérő programban részesül. Ezen félreértés szerint azt hiszik, hogy az átlagos tanuló tantárgyi kurzusokat tanul, míg a tehetséges gyerek valamilyen magasabb rendű képességeket. Ebből egyből következik az is, hogy a tehetségeseknek nincs szükségük tartalomra, és az átlagos tanulóknak nincs szükségük magasabb szintű képességekre. Természetesen ez hibás feltevés annak tekintetében, hogy miből is áll a differenciálás. Állandók a témával kapcsolatos nézeteltérések. Bizonyos kutatók számára a differenciált gyakorlat lényege abban áll, hogy a tanulók egyéni projektmunkákon dolgozzanak (Renzulli 1986). Mások szerint a differenciálást az általános tanóra keretében egyéni megközelítésekkel elégíthetjük ki legjobban (Treffinger 1993). Megint mások értelmezésében a differenciálás olyan integratív és átfogó tapasztalatsorozatot igényel, amit az azonos szellemi szinten levő társakból álló támogató környezetben élnek át a gyerekek (VanTassel-Baska 1995).

Sok területen van tehát eltérés a nézetekben a tehetségesek differenciálásában, azonban a legfőbb kérdés ezek közül: integrált osztályban (heterogén csoportban) vagy „válogatott” osztályban (homogén csoport) folyhat-e hatékonyan a tehetséggondozás az iskolában? Erre a kérdésre többféle megközelítésből többféle választ adnak a kutatók és gyakorló szakemberek. Célszerű ezeket áttekinteni, hogy korrekt felhasználási formákat alakíthassunk ki a pedagógiai gyakorlatban.

Az integráció az oktatásbeli egyenlőség metaforájává vált. Az integrált osztályok általában olyan osztályfelosztásra utalnak, ahol sokféle képességű tanuló együtt tanul. Abból indul ki, hogy minden diák számára az a legelőnyösebb, ha azonos osztályban tanulnak, hogy ilyen felállásban minden tanuló magasabb szinten teljesít, és hogy a tanár az egyénenként lényegesen eltérő képességű tanulók számára értelmet tud adni a tanulásnak. Mi a baj ezzel a gyakorlatban?

A tehetséggondozás és a speciális oktatás kutatásaira alapozva joggal lehetünk szkeptikusok azzal kapcsolatban, hogy mennyire működik jól az integráció olyan tanulóknál, akik jelentősen eltérnek az osztály normáitól. Néhány tehetségnevelési tanulmány zavaró jelenségeket hozott napvilágra. Az olyan iskolák általános osztálybeli oktatása, ahol formális tehetségprogramok működnek, általában hasonlít a formális tehetségprogram nélkül működő iskolák oktatására. A változtatások jelentéktelenek voltak a tehetséges tanulók tanmenetében (Archambault és mtsai 1993). A kutatás kimutatta, hogy az általános osztályokban kevés differenciálásban részesültek a tehetséges diákok. Olyannyira, hogy az egyik tanulmány szerint a megfigyelt tanulók az általuk végzett iskolai tevékenység 84%-ában nem részesültek tanmeneti differenciálásban (Westberg és mtsai 1993).

A kiválóság és az egyenlőség vitája az egyik legproblémásabb feszültség, amely átjárja világszerte az iskolákat. A gyakorlatban létfontosságú, hogy az iskolák az egyenlőség és a kiválóság elvére egyaránt összpontosítsanak. A hátrányos helyzetű, kisebbségi, belvárosi iskolákba járó gyermekek környezete nagyon megnehezíti számukra a tanulást. Az ilyen környezetben iskolába járni kénytelen gyermekek esetében nem az a kérdés, hogy miért nem tanulnak, hanem az, hogy hogyan képesek tanulni az útjukban álló akadályok ellenére. Ezen túl, a fejlődési fogyatékossággal rendelkező gyermekek, vagy azok, akik kevésbé készek a tanulásra, további segítségre szorulnak. Ez a legkevesebb, amit adhatunk nekik. Következésképpen, nagy figyelem irányul arra a kérdésre, hogy hogyan lehet a hátrányos helyzetű családokból származó vagy fogyatékossággal rendelkező gyermekeket tanítani.

Ugyanakkor a társadalom fejlődése azon múlik, biztosítjuk-e, hogy az oktatási források egyenlően legyenek elosztva, és a kiválóságot segítsék elő. Fontos komolyan venni a kérdéskör átgondolásához Silverman (1994, p. 3) kijelentését: „a legokosabb diákok visszatartása nem fogja varázslatos módon segíteni a lassabbakat". Ma gyakran az oktatási eredmények egyformaságára törekszünk ahelyett, hogy egyforma lehetőségeket biztosítanánk a különböző rejtett képességek kibontakozásához.

Az egyéni eltérésekre való reagálás, valamint az eltérő eredmények megengedése nem hoz létre elitizmust, amely gyakori vád a tehetséges diákok számára indított programokkal szemben. Valójában ennek épp az ellenkezője igaz (Allan 1991). Ezen túl, ha a tehetséges diákok megfelelő programban részesülnek, akkor megerősödik bennük a kortársaikkal való kapcsolattartás képessége. A hatékony tanítás továbbá magában hordozza az „optimális párosítást" (Robinson–Robinson 1982), vagyis olyan problémák kitűzését a diák számára, amelyek szintje észrevehetően meghaladja azt a szintet, amellyel a diák már megbirkózott. A túl könnyű feladatok unalomhoz vezetnek, a túlságosan nehéz feladatok frusztrációhoz. Egyik sem segíti elő az optimális tanulást, vagy motivál a tanulásra. Minden gyermeknek egyformán meg kell adnunk a lehetőséget, hogy tanuljon, és kiteljesítse potenciálját. Az „egyméretű" oktatási rendszer nem hatékony, és így nem tesz eleget az egyenlőség elvének. Az egyenlőséget úgy kell tekinteni, mint egyfajta hozzáférési lehetőséget a megfelelő oktatáshoz. Sirotnik (1983, p. 26) szavaival: „Az iskolázás minősége nem csupán a feladattal eltöltött időt jelenti, hanem a hasznosan eltöltött időt is." És, ahogy Gardner (1991, p. 92) kijelentette: „A jó társadalom nem az, amelyik figyelmen kívül hagyja az egyéni eltéréseket, hanem az, amelyik bölcsen és emberségesen kezeli azokat." A differenciált tehetségfejlesztés az egyik módja a tanulási képességben jelentkező egyéni eltérésekre való reagálásnak (Mező 2004).

A homogén csoportosítás már több mint 100 éve jelen van. Kezdetben a csoportokat informálisan alkották, és olyan diákok jártak egy csoportba, akik a tantervnek körülbelül ugyanolyan szintjén álltak, és ugyanolyan ütemben voltak képesek tanulni. Milyen érvek szólnak a képesség szerinti csoportosítás mellett? A képesség és teljesítmény szerinti csoportosítás a kor szerinti csoportosítással szemben hatékony, mert

1. megfelelőbb párosítást nyújt a tehetséges diák fejlődési készenléte és igényei, valamint a képzés között;
2. az eltérő képességekkel rendelkező diákok eltérően reagálnak a különböző oktatási stratégiákra és tanítási módszerekre;
3. a diákok jobban tanulnak, amikor olyan diákokkal vannak együtt, akiknek a kompetenciája az ő szintjükkel megegyező vagy annál egy picivel magasabb;
4. a csoportosítás kihívást jelent a diákok számára, hogy kitűnjenek vagy előretörjenek (Benbow 1997).

Fontos kiemelni azt is, hogy az intellektuálisan fejlett diákoknak nagyobb előnyük származik az olyan képzésből, amely nagymértékű felelősséget ruház rájuk az órákon szerzett információ rendszerezésében és értelmezésében. A kevésbé jó képességű gyermekek ezzel szemben konkrétabb és kevésbé elvont prezentációkat igényelnek, ahol kevesebb információmennyiséget kell befogadniuk (Snow 1986).

A képesség szerinti csoportosítás jobb szociális környezetet is biztosít a gyermekek, legalábbis a tehetséges gyermekek számára; a nap egy részét olyan gyermekek társaságában töltik, akik tanulmányi szempontból hozzájuk hasonlóak, és akik jobban megértik igényeiket, humorukat és szókincsüket (Lubinski–Benbow 1995). A képesség szerinti csoportosítás programjában való részvétel csökkenti a szándékos alulteljesítést a tehetségesek körében; egy ilyen csoportban kevesebb szükségét érzik annak, hogy eltitkolják képességeiket annak érdekében, hogy társaik elfogadják őket. Nincs senki a csoportban, aki kigúnyolná őket.

2.3.4. Összegzés: változatosság a szervezeti keretekben

Hagyományosan a *tanóra* a terepe a tehetség felismerésének és fejlesztésének, azonban a gyakorlat bizonyította, hogy csak ebben a szervezeti keretben nem lehet megoldani a hatékony iskolai tehetséggondozást. Leginkább azért nem, mert a tanóra kevésbé teszi lehetővé a teljes egyéni differenciálást, mint a *tanórán és iskolán kívüli* szervezeti formák. A lényeg itt is az, hogy rendszerben tud hatékonyan működni a tehetséggondozás, s ennek a legfőbb elemei a következők (Balogh–Koncz 2008; Endrődiné 2003; Fodorné 2008; Fűkőné 2008; Herskovits 2000; Koncz 2003; Kormos 2003, Kormos–Sarka 2008; Sarka 2003; Titkó 2008; Tóth T. 2008):

- a tanórai differenciálás különféle formái (minél több kis csoportos, nívócsoportos és egyénre szabott munka!),
- speciális osztály,
- fakultáció,
- délutáni foglalkozások (szakkör, blokk, önképzőkör stb.),
- hétvégi programok,
- nyári kurzusok,
- mentorprogram stb.

Ezek mindegyike hatékony lehet: a célkitűzésekkel, a programmal, a tanulók jellemzőivel összhangban kell közülük választani.

Természetesen fontos, hogy a tanórai és tanórán (iskolán) kívüli formákat összekapcsoljuk a hatékonyság érdekében, ebben a tekintetben is csak *egységes rendszerben* lehet sikeres a tehetséggondozás. Nyilvánvalóan más kiemelt funkciói, jellemzői vannak a tanórának és a tanórán kívüli formáknak. Az órai tehetségfejlesztés során az érdemi differenciált munka elengedhetetlen a sikerhez, emellett középpontba kell állítani az egyéni tanulási stratégiák fejlesztését, s folyamatosan biztosítani kell a tanulók számára a valódi kihívásokat. A tanórán kívüli tevékenységeket elsősorban az egyéni érdeklődésre kell építeni, a minőségi gazdagítás elveit kell megvalósítani, valamint változatos szervezeti formákat kell kialakítani, lehetőleg túllépve az iskola falain is (vö. Balogh 2000). A tanórai foglalkozásokon, egyéb keretekben is akkor hatékony a tehetségfejlesztés, ha a differenciálás elve következetesen érvényesül.

IRODALOM

Allan, S. (1991): Ability-grouping research reviews: What do they say about grouping and the gifted? *Educational Leadership,* 48 (6), 60–65.

Archambault, F. X.–Westberg, K. L.–Brown, S. W.–Hallmark, B. W.–Zhang, W.–Emmons, C. L. (1993): Classroom practices used with gifted third and fourth grade students. *Journal for the Education of the Gifted,* 16 (2), 103–119.

Balogh L. (szerk.) (2000): *Tehetség és iskola*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen.

Balogh L. (2004): *Iskolai tehetséggondozás*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen.

Balogh L. (2006): *Pedagógiai pszichológia az iskolai gyakorlatban*. Mesterek mesterei. Urbis Könyvkiadó, Budapest.

Balogh L.–Koncz I. (szerk.) (2008): *Kiterjesztett tehetséggondozás*. Professzorok az Európai Magyarországért, Budapest.

Balogh L.–Polonkai M.–Tóth L. (szerk.) (1997): *Tehetség és fejlesztő programok*. A Magyar Tehetséggondozó Társaság és a KLTE Pedagógiai-Pszichológiai Tanszék közös kiadványa, Debrecen.

Benbow, C. P. (1991): Meeting the needs of gifted students through acceleration. A neglected resource. In Wang, M. C.–Reynolds, M. C.–Walberg, H. J. (eds): *Handbook of Special Education,* Vol. 4. Pergamon, Elmsford, NY, 23–36.

Benbow, C. P. (1997): Grouping intellectually advanced students for instruction. In VanTassel-Baska, J. (ed.): *Gifted and Talented Learners.* Love, Denver, 261–278.

Benbow, C. P.–Lubinski, D. (1994): Individual differences among the gifted: How can we best meet their educational needs? In Colangelo, N.–Assouline, S. G.–Ambroson, D. L. (eds): *Talent Development,* Vol 2. Ohio Psychology Press, Dayton, OH, 83–100.

Betts, G. T. (1986): *The Autonomous Learner Model for the Gifted and Talented.* Creative Learning Press, Mansfield Center, CT.

Cattell, R. B. (1943): The Measurement of adult intelligence. *Psychological Bulletin,* 40, 153–193.

Czeizel E. (1997): *Sors és tehetség.* Minerva Kiadó, Budapest.

Endrődi Zoltánné (2003): Tehetséggondozás a Koroknay Dániel Általános Iskolában. In Balogh L.–Koppány L. (szerk.): *15 év a tehetségekért: elmélet és gyakorlat.* Mád, 185–199.

Feger, B. (1997): Tehetséggondozó programok. In Balogh L.–Polonkai M.–Tóth L. (szerk.): *Tehetség és fejlesztő programok*. A Magyar Tehetséggondozó Társaság és a KLTE Pedagógiai-Pszichológiai Tanszék közös kiadványa, Debrecen, 47–57.

Feldhusen, J. F. (1995): Talent-development: the new direction in gifted education. *Roeper Review,* 18 (2), 10.

Feldhusen, J. F.–Kolloff, P. B. (1979): An approach to career education for gifted. *Roeper Review,* 2 (2), 13–17.

Feldhusen, J. F.–Kolloff, P. B. (1986): The Purdue Three-Stage Model for gifted education at the elementary level. In Renzulli, J. S. (ed.): *Systems and Models for Developing Programs for the Gifted and Talented.* Creative Learning Press, Mansfield Center, CT, 126–152.

Fodor Istvánné (2008): Valóságtérkép az iskolai tehetséggondozásról. In Balogh L.–Koncz I. (szerk.): *Kiterjesztett tehetséggondozás.* Professzorok az Európai Magyarországért, Budapest, 243–252.

Fűkőné Szatmári Melinda (2008): Tehetséggondozás a taktaharkányi Apáczai Csere János Általános Iskolában. In Balogh L.–Koncz I. (szerk.): *Kiterjesztett tehetséggondozás*. Professzorok az Európai Magyarországért, Budapest, 235–242.

Gagné, F. (1990): Giftedness and talent: reexamining a reexamination of the definitions. *Gifted Child Quaterly, 3,* 17–25.

Gardner, H. (1991): *The Unschooled Mind*. Fontana Press, London.

Guilford, J. P. (1967): *The Nature of Human Intelligence.* McGraw-Hill, New York.

Gyarmathy Éva (2006): *A tehetség (fogalma, összetevői, típusai, azonosítása)*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

Heller, K. A.–Mönks, F. J.–Passow, H. (1993): *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent.* Pergamon, Oxford, p. 27.

Heller, K. A.–Mönks, F. J.–Sternberg, R. J.–Subotnik, R. (eds) (2000): *International Handbook of Giftedness and Talent.* Pergamon, Amsterdam – New York.

Herskovits Mária (2000): A tehetségfejlesztés különböző útjai – nemzetközi körkép. In Balogh L.–Herskovits M.–Tóth L. (szerk.): *A tehetségfejlesztés pszichológiája*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 129–142.

Keating, D. (1991): *Intellectual Talent: Research and Development*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD.

Koncz I. (2003): A kiterjesztett tehetséggondozás rendszere és tartalmi elemei. In Balogh L.–Koppány L. (szerk.): *15 év a tehetségekért: elmélet és gyakorlat.* Mád, 56–61.

Kormos D. (2003): A tehetséggondozás térségi hálózati programja BAZ megyében. In Balogh L.–Koppány L. (szerk.): *15 év a tehetségekért: elmélet és gyakorlat.* Mád, 18–34.

Kormos D.–Sarka F. (2008): Átfogó megyei hálózati program a tehetséggondozásra: Borsod-Abaúj-Zemplén megye. In Balogh L.–Koncz I. (szerk.): *Kiterjesztett tehetséggondozás*. Professzorok az Európai Magyarországért, Budapest, 277–292.

Lubinski, D.–Benbow, C. P. (1995): Optimal development of talent: respond educationally to individual differences in personality. *Educational Forum,* 59, 381–392.

Mező F. (2004): *A tehetség tanácsadás kézikönyve*. Kocka Kör TKE, Debrecen.

Mező Ferenc–Mező Katalin (2007): *Tanulási stratégiák fejlesztése az IPOO-modell alapján.* Kocka Kör, Debrecen.

Mező F.–Miléné Kisházi Edit (2004): *Iskolai alulteljesítés tanulásmódszertani aspektusból.* Borsod-Abaúj-Zemplén megyei Pedagógiai és Szakmai Szolgáltató Intézet, Miskolc.

Moon, S. M.–Feldhusen, J. F. (1991): Identification procedures: bridging theory and practice. *Gifted Child Today,* 14 (1), 30–36.

Mönks, F. J.–Knoers, A. M. P. (1997): *Ontwikkelingpsychologie.* (7. kiadás) Assen, Van Gorcum.

Mönks, F. J.–Van Boxtel, H. W. (1985): Gifted adolescents: a developmental perspective. In Freeman, J. (ed.): *The Psychology of Gifted Children.* Wiley, Chichester, 275–295.

M. Nádasi Mária (2001): *Adaptivitás az oktatásban*. Comenius Bt., Pécs.

Nagy K. (2000): Tehetségfejlesztő program a törökszentmiklósi Bethlen Gábor Református Általános és Szakiskola, Kollégiumban. In Balogh L. (szerk.): *Tehetség és iskola.* Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 215–218.

Passow, A. H. (1958): Enrichment of education for the gifted. In Henry, N. B. (ed.): *Education for the Gifted.* Fifty-seventh Yearbook of the National Society for the Study of Education. University of Chicago Press, Chicago.

Páskuné Kiss Judit (2000): *A másodoktatás szerepe a képességek fejlesztésében – különös tekintettel a tehetséggondozásra*. PhD-értekezés, Debreceni Egyetem Pedagógiai-Pszichológiai Tanszéke, Debrecen.

Petriné Feyér Judit–Mészölyné Fehér Katalin (1982): *Differenciált osztálymunka, optimális elsajátítás a gyakorlatban.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Piirto, J. (1999): *Talented Children and Adults*. Upper Saddle River, Columbus, Ohio.

Polonkai Mária (1999): Tehetségfejlesztő iskolai programok készítésének szempontjai. In Balogh L. (szerk.): *Tehetség és iskola.* KLTE, Debrecen, 178–214.

Polonkai Mária (2002): Differenciálás a tanulásszervezésben. In Balogh L.–Koncz I.–Tóth L. (szerk.): *Pedagógiai pszichológia a tanárképzésben*. FITT Image–Debreceni Egyetem, Budapest, 125–152.

Renzulli, J. S. (1978): What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi Delta Kappa,* 60, 180–184.
Renzulli, J. S. (1994): *Schools for Talent Development.* Creative Learning Press, Mensfield Center, CT.
Renzulli, J. S. (ed.) (1986): *Systems and Models for Developing Programs for the Gifted and Talented.* Creative Learning Press, Mensfield Center, CT.
Renzulli, J. S.–Reis, S. M. (1985): *The Schoolwide Enrichment Model: a Comprehensive Plan for Educational Excellence.* Creative Learning Press, Mensfield Center, CT.
Renzulli, J. S.–Reis, S. M. (1986): The Enrichment Triad / Revolving Door Model: a schoolwide plan for the development of creative productivity. In Renzulli, J. S. (ed.): *Systems and Models for Developing Programs for the Gifted and Talented*. Creative Learning Press, Mensfield Center, CT, 216–266.
Robinson, N. M.–Robinson, H. B. (1982): *The Optimal Match: Devising the Best Compromise the Highly Gifted Student.* Jossey-Bass, San Francisco.
Sarka F. (2003): Új kihívások a tehetséggondozásban. In Balogh L.–Koppány L. (szerk.): *15 év a tehetségekért: elmélet és gyakorlat*. Mád, 106–116.
Silverman, L. K. (1994): *Gifted Education: an Endangered Species. Empowering Partnerships Fulfilling Potential.* Indiana Association for the Gifted.
Sirotnik, K. A. (1983): What you see is what you get: consistency, persistency and mediocrity in classrooms. *Harvard Educational Review,* 53, 16–31.
Snow, R. E. (1986): Individual differences and the design of educational programs. *American Psychologyst,* 41, 1029–1034.
Spearman, C. (1904): General intelligence, objectively determined and measured. *American Journal of Psychology,* 15, 201–293.
Sternberg, R. J. (1999): The theory of successful intelligence. *Review of General Psychology,* 3, 292–316.
Tannenbaum, A. J. (1983): *Gifted Children: Psychological and Educational Perspectives.* Macmillan, New York.
Terman, L. M.–Oden, M. H. (1954): The gifted child grows up: twenty-five years' follow-up of a superior group. In *Genetic Studies of Genius.* Stanford University Press, Stanford, CA.
Thurstone, L. L. (1938*): Primary Mental Abilities*. University of Chicago Press, Chicago.
Titkó I. (2008): Tehetséggondozás a Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziumában. In Balogh L.–Koncz I. (szerk.): *Kiterjesztett tehetséggondozás*. Professzorok az Európai Magyarországért, Budapest, 265–276.
Tóth L. (2003): *A tehetségfejlesztés kisenciklopédiája*. Pedellus Tankönyvkiadó, Debrecen.

Tóth L. (2008): A tanórán kívüli (iskolai és iskolán kívüli) fejlesztés: gazdagítás, gyorsítás, individualizáció. In Balogh L.–Koncz I. (szerk.): *Kiterjesztett tehetséggondozás*. Professzorok az Európai Magyarországért, Budapest, 79–96.

Tóth T. (2008): Tehetséggondozás az Árpád Vezér Gimnázium és Kollégiumban. In Balogh L.–Koncz I. (szerk.): *Kiterjesztett tehetséggondozás*. Professzorok az Európai Magyarországért, Budapest, 253–264.

Treffinger, D. J. (1986): Fostering effective, independent learning through individualized Programming. In Renzulli, J. S. (ed.): *Systems and Models for Developing Programs for the Gifted and Talented.* Creative Learning Press, Mansfield Center, CT, 429–460.

Treffinger, D. J. (1993): Stimulating creativity: issues and future directions. In Isaksen, S. G.–Murdock, M. C.–Firestein, R. L. (eds): *Nurturing and Developing Creativity: The Emergence of Discipline.* Ablex, Norwood, NJ, 8–27.

Turmezeyné Heller Erika (2008): Integráció és differenciálás egyszerre a tehetséggondozásban – kooperatív tanulás. In Balogh L.–Koncz I. (szerk.): *Kiterjesztett tehetséggondozás*. Professzorok az Európai Magyarországért, Budapest, 67–78.

VanTassel-Baska, J. (1993): *Comprehensive Curriculum for Gifted Learners.* Allyn and Bacon, Boston.

VanTassel-Baska, J. (1995): *Planning and Implementing Curriculum for the Gifted.* Love, Denver, CO.

Westberg, K. L.–Archambault, F. X.–Dobyns, S. M.–Salvin, T. J. (1993): *An observational study of instructional and curricular practices used with gifted and talented students in regular classrooms.* National Research Center on Gifted and Talented, Storrs, CT.

Kovács Gábor

II.

Feladatok a matematikai tehetség fejlesztéséhez

BEVEZETÉS

A tehetség fogalma: a tehetség potenciált, lehetőséget jelent olyan kiemelkedő teljesítményre, amely társadalmilag hasznos, és amely megelégedéssel, örömszerzéssel jár elérője számára (Czeizel 1997).

A társadalmi tevékenység alapján megnyilvánuló teljesítmény függ a genetikai adottságoktól és a külső hatásoktól („tanultságtól"), a két tényező együttes interakciója.

Az örökletes hatás általános értelmesség esetén körülbelül 50%, a matematikai képesség esetén viszont 90%.

A tehetség összetevői:

a) Általános értelmesség: az intelligencia fokát az intelligenciahányados (IQ) határozza meg. A tehetség zónát 130–200 közötti IQ jelöli. A 160 fölöttieket zseninek tartják.
b) Átlagot meghaladó mentális adottság: a tehetség irányát határozza meg. Az iskolai gyakorlat csak a gyerekek néhány tehetségszférájára van tekintettel, szűken méri a tehetséget.
c) Kreativitás: a tehetség talán legfontosabb összetevője. A kreatív személyiség jellemzője az eredetiség. A másképpen gondolkodás adottsága, a kreatív gyerek zavarba ejtő, szokatlan kérdésekkel „bombázza" a tanárt. Túlzottan kritikus, érzékeny.
d) Motiváció: szorgalmat, kitartást, megszállottságot, és leginkább kíváncsiságot és spontán érdeklődést jelenthet a tehetségnél. Ez a belső hajtóerő.

A külső feltételek hatása a tehetségre
Külső feltételként a család, az iskola, a kortársak és a társadalom gyakorol hatást a tehetségre. Emeljük ki ebből a pedagógus szerepét. Megoldandó feladatai:

a) A személyiség értékes vonásait kibontakoztatni.
b) Az általános értelmi képességet fejleszteni.
c) Megkeresni a speciális mentális adottságokat.

Belső feltételként megemlíthetjük a teljesítményigényt és az emocionális stabilitást. Ez utóbbi érzelmi biztonságot feltételez, így jobb a kudarctűrés. Az EQ (emocionális kvóciens) is örökletes.

A tehetség gondozása
A gyereket életkorának megfelelően kezeljük, kíváncsisága, megismerésvágya által kell elérnünk a fejlődést, nem pedig úgy, hogy mindenáron megelőzze a kortársait. A gyerekek közötti versenyszellem hajtóerő, de túlzott mértékben gátja a fejlődésnek. Ha erőltetjük a fejlesztést, az előnyök előbb-utóbb eltűnnek, de az erőltetés folyamán keletkező esetleges lelki sérülések megmaradhatnak.

A matematikai tehetség

A matematikával szemben mai napig számos előítélettel találkozhatunk. Sokan az állítják, hogy a matematika tanulásához különleges tehetségre van szükség. Mások szerint különleges emlékezőtehetség szükséges a formulák, gondolatmenetek megjegyzéséhez.

A matematikai tehetség a legkorábban megjelenő tehetségtípus. Megmutatkozása ugyan a zenei tehetségnél későbbi, de fejlődési fázisai gyorsabbak. A matematikai tehetség ismeretanyagot, tapasztalatot alig igényel, egybeesik a formális logikával.

A matematikai tehetség fejlődési szakaszait vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a gyerekkorban, főleg az egész számok elméletére vonatkozó kérdések iránti érdeklődésben, valamint a témakörben felállítható feladatok megoldásán érzett örömben fejeződik ki. Az elemi mennyiségtan gyors elsajátítása, valamint a kiváló számolási készség azonban még nem feltétlenül jelent matematikai tehetséget. A számolótehetségeket elsősorban kiváló hosszú távú memóriájuk jellemzi. A tizenéves kor vízválasztó ezen a területen. A legtöbb matematikai tehetség már húszéves kora előtt komoly tudományos eredményeket ért el. A matematikai tehetség virágzása (Amstrong szerint) kb. 40 éves korig tart, különleges kivétel Weierstrass, aki negyvenévesen vált komoly matematikussá.

A kisgyerekeknél mutatkozó kiemelkedő matematikai képesség és érdeklődés később másféle területre térhet át.

A fejlődés a következő dimenziók mentén figyelhető meg:

a) A matematikai feladatok észlelésének jellege a konkretizálttól a formalizált felé halad.
b) Változik a matematikai feladatok általánosításának szintje.
c) Fejlődik a gondolkodási folyamat redukciójának mértéke.

d) Növekszik a gondolkodás folyamatának rugalmassága.
e) Fokozódik az elegáns megoldásokra való törekvés.
f) Magasabb szintet ér el a matematikai emlékezet.

A matematikai tehetség azonosítása
A matematikai tehetség tesztekkel történő mérése objektív jellege miatt sokkal megbízhatóbb, mint például zenei tehetség esetén. Erre a célra használhatók az IQ-tesztek is.

A matematikai tehetség korai megjelenése miatt (valószínűleg az idegsejtek elrendeződése okán már születéskor meglevő képesség, amelyre a környezet stimulálóan hat) azonosítására jó esélye van a szakembereknek.

Érdekesség, hogy a vizsgálatok azt mutatták, hogy a matematikai tehetségeknél az átlagosnál gyakoribbak az immunbetegségek, és a balkezesek száma is nagyobb.

A fiúk és lányok vizsgálatakor pedig az látszik, hogy 12–13 éves kor után a fiúk tehetségesebbek, a kutatók ezt jobb téri képességeikkel magyarázták.

A matematikai tehetség azonosításának főbb irányelvei:

a) A kisgyerekeknél térbeli–vizuális játékok, rejtvények.
b) A matematikai tehetséggondozó programoknál objektív képességtesztek.
c) Legjobban matematikafeladatokkal lehet azonosítani a matematikai tehetséget.
d) Geometriai rejtvények jól mérhetik a tehetség egyes vonásait.
e) Térbeli–vizuális képességeket, illetve memóriát mérő eljárások is jól használhatók.
f) Az intelligenciatesztek is korrelálnak a matematikai tehetséggel. A Raven-tesztek jól mérik a nem verbális téri gondolkodást.

A matematikai tehetség fejlesztése

A matematikai gondolkodás tanítása
Az újabb kutatások azt hangsúlyozzák, hogy a gyerek önállóan találjo megoldást a tanár segítségével. Bátorítsa a gyerek természetes „hajlandóságát” a probléma megvitatásakor.

A tehetséges gyerekeknél megfigyelhető, hogy szeretnek versenyezni, a teammunka azonban nehezükre esik. Szívesebben dolgoznak egyedül és konzultálnak tanárukkal. A csoportos gondolkodás nem annyira hatékony, a folyamat során inkább a kész gondolatok megvitatására van szükség.

Rávezető kérdések lehetnek:

Miért gondolod így? Másképp is meg lehetne oldani a problémát? Hogy lehetne használni ezt az ötletet? Tudnál példát mondani?

A matematikai gondolkodást segíti, ha az eljárásokat előre megbeszéljük, megvalósításkor végig közösen dolgozunk.

A matematikai gondolkodás döntő tényezője az a képesség, hogy felismerjük a szabályszerűségeket, és meglássuk a kapcsolatokat. Cél, hogy a gyerek a matematika lényegét jelentő belső szerkezetet lássa, és ne a megtanulandó, elszigetelt szabályokat.

Az eszköz típusú megértés a szabályok (algoritmusok) megtanulását, és bizonyos körülmények között történő alkalmazásának képességét jelenti. A kapcsolatok megértése a szabályok mögött húzódó okfejtés ismeretét is jelenti, és a gyerek megértve képes rekonstruálni azokat. Ez a fajta tanulás mélyebb, és időben is tovább tart.

Elemi gondolkodási műveletek:

- Analízis: a problémát olyan részekre osztjuk fel, ahol a részek is önálló egészet alkotnak.
- Szintézis: a részeket egésszé kapcsoljuk össze.
- Elvonás: közös tulajdonság kiemelése.
- Konkretizálás: a halmaz tulajdonságát egy elemére vonatkoztatjuk.
- Általánosítás: egy részhalmazról egy bővebb halmazra térünk át.
- Specializálás: az általánosítás fordított iránya.
- Összehasonlítás: elvont dolgok azonosságát, vagy éppen különbözőségét tárjuk fel.
- Rendezés: a halmaz elemeit adott szempont szerint csoportosítjuk.
- Összefüggés-keresés: két dolog közötti relációt tárunk fel.
- Kiegészítés: egy dologhoz egy reláció ismeretében másikat találunk.
- Analógia: alapelvek hasonlóságának felismerése.

A megismerőtevékenység fejlesztése

Az észlelés fejlesztése a matematikatanítás keretében fontos szerepet játszik. Az észlelési fejlettség az értelmi és a személyiségi szférára is kihat. A figyelem, az analitikus–szintetikus folyamatok magas szintje, az érzelmi–akarati élet kiegyensúlyozottsága elősegíti a sikeres tanulást. Fontos lehet a térbeli tájékozódó képesség (térlátás) fejlesztése.

A figyelem fejlesztése, koncentráltságának, tartósságának, terjedelmének, megosztottságának, átkapcsolhatóságának színvonala a matematikatanulás szempontjából igen jelentős lehet.

Az emlékezet fejlesztése a tanulás színvonalát erősen befolyásolja. Meg kell találni a helyes arányt a mechanikus emlékezet és a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése között.

Gyorsítás, dúsítás
A gyorsítás a matematikai tehetséggondozásban igen hatékony módszer.

Már az óvodáskortól kezdve folyamatosan, a gyerek érdeklődési területének megfelelő irányban, életkortól független előmenetellel történik. Nagy szerepük lehet ebben a munkában a nyári táboroknak. Az eredményességet növelheti, ha képzett mentor tanárok működnek közre. A mentorok folyamatosan tesztelik a gyerekeket, így pontosan megismerhetik erősségeiket, hiányosságaikat, hibáikat. Így egyéni fejlesztőprogramot tudnak kidolgozni, és támogathatják a gyereket a tanulási folyamatban.

Magyarországon is gyakoriak a levelező matematikai versenyek, klubok. Ezek akkor hatékonyak, ha a kiemelkedő teljesítményt mutató gyerekeknek lehetőséget biztosítanak a továbblépésre, személyes kapcsolatokra matematikusokkal, esetleg egyéni programok kidolgozásával. A tehetségek fejlődéséhez egyéni odafigyelésre van szükség.

Versenyek

A versenyek szintén hatékony formái lehetnek a tehetséggondozásnak. Nagy hagyományai vannak a tanulmányi versenyeknek, melyeket az Oktatási Minisztérium és háttérintézményei szerveznek.

Kérdések a versenyekkel kapcsolatban: Mit és hogyan mérjünk?

Gyakran a reprodukáló tudást mérik, nem pedig a gyakorlati problémahelyzetben történő ismeretalkalmazást.

Országos matematika versenyek:

Tesztversenyek:

- Zrínyi Ilona Matematikaverseny
- Gordiusz Matematika Verseny
- Nemzetközi Kenguru Matematika Verseny

Indoklásos versenyek:

- Matematika OKTV
- Arany Dániel Matematika Verseny
- Varga Tamás Matematikaverseny
- Kalmár László Matematikaverseny
- Kürschák József Matematika Tanulóverseny
- Nemzetközi Magyar Matematikai Verseny
- Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye

Levelezős versenyek:

Középiskolai Matematikai Lapok A, B, C, K versenyei
KöMal Tesztverseny
Abacus
Kis Vakond
SuliKVÍZ

TEHETSÉGGONDOZÁS A DEBRECENI KOSSUTH GIMNÁZIUMBAN

Gimnáziumunk „elit” iskola, diákjaink értelmesek és motiváltak, valamint támogató a szülői háttér is. A képzés a hat évfolyamos osztályainkban általános, és vannak a négy évfolyamos képzésünkben tagozatos osztályaink, de a diákok főleg az utolsó két évben tanulhatnak emelt óraszámban az érdeklődésüknek megfelelő, továbbtanulásukhoz szükséges tárgyakat fakultációs rendszerben.

A matematikának mint kötelező érettségi tárgynak fontos szerepe van az iskolánkban. A műszaki–informatika, illetve a gazdasági tagozaton heti plusz egy matematikaóra van, az utolsó két évfolyamon pedig kötelező a matematikafakultáció.

A matematikatanítás a tanórán kívül szakkörben zajlik, amit a hetedikes és nyolcadikos diákjainknak tartunk. A legtehetségesebb diákjaink központi, városi szakkörbe járnak, ahol egyetemi oktatók tanítanak. A versenyek második fordulójába jutott tanulókkal pedig egyénileg foglalkozunk kollégáimmal.

A más általános iskolába járó nyolcadikosok részére a központi felvételire előkészítő tanfolyamot szervezünk abban a reményben, hogy ha a gyerekek megismerik az iskolát és a tanárokat, akkor nagyobb számban és szívesebben választják a Kossuthot. Mivel a tanfolyam ingyenes, segíti az esélyegyenlőséget.

Tervezünk a 12. évfolyamosok számára tartandó városi szakkört. Ennek célja egyrészt az emelt szintű matematika érettségire való felkészítés, másrészt – mivel az egyetemre sokan középszintű matematika érettségivel jutnak be – az egyetemi tanulmányok előkészítése.

Azokról a témakörökről tervezünk előadást, melyek csak kiegészítő anyagként szerepelnek a középiskolás tantervben, így csak fakultáción tanítjuk. Például határérték-számítás, differenciálszámítás, integrálszámítás. Ezeket egészíti ki a törzsanyag rendszerező összefoglalása.

A jegyzet utolsó részében egy ilyen előadásra mutatok példát.

A tehetséggondozás legfőbb terepe a tanóra. Itt kell, hogy a tehetséges gyerek megkapja azt az indíttatást, motivációt, amely további munkára, nagyobb kihívások felé orientálja. Ehhez szakmailag kiválóan felkészült, jó pedagógiai érzékkel rendelkező tanárok kellenek. Szükséges, hogy a tanárnak legyen határozott szakmai elképzelése, ugyanakkor legyen rugalmas, képes legyen megérteni és alakítani a diákok ötleteit, és megteremteni egy felfedezésre alkalmas légkört, melyben a diákok jól érzik magukat.

Ez a kiadvány tanári segédletként készült. Olyan mintafeladatokat tartalmaz, melyeket akár a hetedik évfolyamtól kezdve tanórákon is meg lehet oldani. A feladatokat több szempontból próbálom elemezni, a különböző korosztályoknak és az érdeklődésnek megfelelően.

A közreadott tematika tájékoztató jellegű. A tanfolyam gyakorlatcentrikus. A kijelölt elméletet ezen feladatok interaktív elemzése során dolgozzuk fel.

1. feladattípus

Kiinduló feladat:

Zsiga bácsi udvarán kacsák és disznók vannak, az állatoknak összesen 7 fejük és 20 lábuk van. Hány kacsa és hány disznó lehet?

I. megoldás

Módszer:	irányított próbálgatás
Évfolyam:	5–7.
Helyszín:	szakkör
Tanári attitűd:	felfedeztetés

A feladat felolvasása után valószínűsíthetően a diákok azonnal önállóan kezdenek próbálkozni, minden tanári segítség nélkül. Első körben szerintem kár irányítani őket, mert nem képesek a tanárra figyelni, a megoldás mint kihívás köti le energiáikat. Mivel a feladatnak véges sok megoldása van, és ezek közül is a szóba jöhető megoldások száma csekély, ezért páran biztosan megtalálják a helyes eredményt.

Fontos, hogy a diákokban tudatosítsuk: egy lehetséges megoldás megtalálása még nem a feladat megoldása. Meg kell mutatni, hogy nincs több megoldás. Illetve, hogy a megoldás algoritmusát, gondolatmenetét le kell írni. Különösen fontos ez a feladatmegoldó versenyek (például Varga Tamás-verseny) szempontjából. Ugyanakkor a feleletválasztós versenyeknél (például: Zrínyi-verseny) a tiszta, világos gondolatmenet jelentős időnyereséget jelenthet.

Második körben a tanár feladata, hogy ébren tartsa azon diákok érdeklődését, akik meg tudták oldani a feladatot. Segítségükkel kell a többi diákot rávezetni a megoldásra úgy, hogy lehetőleg ők fedezzék fel, így sikerélményhez jussanak.

A tanár kérdései, instrukciói csak a közös munka keretét adják, ezen belül a gyerekek önálló, alkotómunkát végeznek. Ők haladnak lépésről lépésre, nem kész válaszokat kapnak.

Talán az a legszerencsésebb, ha a tanár a következő instrukciót adja: Foglaljuk közösen táblázatba az összefüggéseket! Milyen állatok vannak és milyen jellemzőkkel?

A táblára a következő táblázat kerülhet:

kacsafej
disznófej
kacsaláb
disznóláb
összes láb

A kezdőpont megtalálása is fontos lehet. Meghatározhatja a próbálgatások rendszerét, a további lépéseket.

Kérdés: Mennyi lehet maximálisan (minimálisan) az állatok lábainak száma?

Ugyanez a rávezetés elhangozhat oldottabb formában: Megszámoltam a lábukat, ilyen sok lábuk nem is lehet.

A táblázat kiindulópontját (első oszlop) közösen töltjük ki:

kacsafej	1
disznófej	6
kacsaláb	2
disznóláb	24
összes láb	26

Innen a gyerekek önálló munkával megtalálhatják a megoldást. A kész táblázat a következő:

kacsafej	1	2	3	4
disznófej	6	5	4	3
kacsaláb	2	4	6	8
disznóláb	24	20	16	12
összes láb	26	24	22	20

A megoldás tehát: 4 kacsa és 3 disznó van az udvaron.

A továbblépés lehetséges módjai: Biztos, hogy nincs más megoldás? Az összes lehetséges megoldás vizsgálatával a megoldáskeresés teljességének igényét alakítjuk ki.

A válasz közös pontosítása után, nevezetesen, hogy a disznók számának csökkentésével csökken az állatok lábának száma, rögzíthetjük, hogy az előbb megtalált megoldás az egyetlen.

A következő lépés szintén nagyon fontos. A diákokban fontos kialakítani az elemzés igényét, illetve készségét. Hogyan lehetett volna egyszerűbben megoldani a feladatot? A kiindulópontból egy lépésben hogyan juthattunk volna a végeredményhez? A gyerekek várhatóan megfogalmazzák, hogy ha a disznók száma eggyel csökken, akkor a lábak száma kettővel, vagyis 8 láb csökkenéshez 4 disznófej csökkentés szükséges.

Egy lehetséges, másik megoldási módszerrel az egyenletrendszert készítjük elő. Esetlegesen felmerülhet a gyerekek körében is, de ha nem, akkor a tanár a következő rávezető kérdésekkel irányíthatja a felfedezést.

A gyerekek még nem tanulták az egyenletek megoldását, de tapasztalatom szerint a változók bevezetését, az egyenletmegoldáshoz szükséges mérlegelvet, ha nem is a maga teljességében, de megértik.

Ha minden állatnak 4 lába lenne, akkor összesen $4 \times 7 = 28$ láb volna. Mivel 8 lábbal kevesebb van, ez a kacsák számának kétszeresét adja. (Kacsánként két mínusz láb.)

Írjuk le ezt algebrai eszközökkel: x – a kacsák száma, y – a disznók száma. Ha a fejek számára vonatkozó összefüggést az $x + y = 7$ egyenlettel írhatjuk le, akkor $4x + 4y = 28$. A lábak számát $2x + 4y = 20$ összefüggés adja.

Hasonlítsuk össze a két egyenletet: a két bal oldal különbsége $2x$, a két jobb oldalé 8.

Akkor ez a két mennyiség egyenlő, azaz $2x = 8$, de ekkor $x = 4$.

A megoldás tehát 4 kacsa, és ebből következően 3 disznó.

Befejező lépés: Egy hasonló feladat önálló megoldásával rögzítjük az algoritmust.

Például: Csővezeték építéséhez nyolcméteres és ötméretes csöveink vannak, összesen 25 darab. Melyikből hány darabot kell felhasználnunk egy 155 méter hosszú vezeték építéséhez?

(A feladat a nyolcadikosok központi felvételi vizsgáján volt kitűzve.)

A feladat fejlesztése számelmélet felé:

A rendőrök triciklitolvajokat üldöznek biciklin. Hány triciklit loptak el, ha összesen 10 kerék vesz részt az üldözésben? (Zrínyi-versenyfeladat.)
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ennyi adatból nem meghatározható.

A Zrínyi-feladatoknál csak egy helyes válasz lehet (szemben a Bolyai-verseny feladataival).

A megoldás így a B, C, D válaszok kipróbálása lehet.

Vezessük vissza az előző feladat megoldási módszerére! Készítsünk táblázatot!

Mivel az összes kerekek száma adott, induljunk ki ebből. Hány triciklit lophattak el?

Az előző feladatnál tárgyalt módon juthatunk el a megoldáshoz.

tricikli	1	2	3
triciklikerekek	3	6	9
biciklikerekek	7	4	1
bicikli	2		

Az első és harmadik oszlopban a biciklikerekek száma páratlan, tehát ez a megoldás nem lehetséges.

A feladat számelméleti megoldását 8. osztályos szakkörön ajánlom. Ebben a korban már igényként megfogalmazódik a gyerekekben, hogy absztrakt módon, algebrai egyenlettel oldjuk meg a feladatot.

Legyen x a rendőrök száma, y a tolvajok száma.

Ekkor a kerekek közötti összefüggést a $2x + 3y = 10$ egyenlet adja.

Ha átrendezzük az egyenletet: $3y = 10 - 2x$

Alakítsuk szorzattá a jobb oldalt: $3y = 2(5 - x)$

$$y = \frac{2(5-x)}{3}.$$

Ha y pozitív egész szám, akkor $(5 - x)$-nek 3 többszörösének kell lennie. Mivel x is pozitív egész, ezért $(5 - x)$ csak 3 lehet. Ebből $x = 2$, valamint $y = 2$ következik.

Tehát 2 rendőr üldöz 2 tolvajt.

A fentihez hasonló, de lényegesen nehezebb számelméleti feladat az alábbi:
A téglalap oldalai pozitív egész számok, területének mérőszáma háromszorosa a kerületének. Mekkorák lehetnek az oldalak? (Varga Tamás-versenyfeladat.)

Ha a és b jelöli a téglalap oldalait, akkor a feladat feltételének megfelelő összefüggést az

$a \times b = 6(a + b)$ egyenlet írja le.

Bontsuk fel a zárójelet, és redukáljuk nullára az egyenletet!

$a \times b - 6a - 6b = 0$

Emeljünk ki a-t az első két tagból:

$a(b - 6) - 6b = 0$

Hogy a bal oldal szorzattá alakítható legyen, növeljük meg 36-tal mindkét oldalt, és emeljünk ki –6-tot a másik két tagból.

$$a(b - 6) - 6(b - 6) = 36,$$
$$(a - 6)(b - 6) = 36.$$

Mivel a és b pozitív egész, $(a - 6)$ és $(b - 6)$ is az, ezeknek 36 osztóinak kell lenniük.
36 pozitív osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
Foglaljuk táblázatba a lehetséges megoldásokat: Feltehetjük például, hogy az a rövidebb oldal, esetleg $a = b$.

$a - 6$	1	2	4	6
$b - 6$	36	18	9	6
a	7	8	10	12
b	42	24	15	12
k	98	64	50	48
t	288	192	150	144

Tehát négy különböző téglalap van, melyek teljesítik a feltételeket.
A feladat másik lehetséges megoldását a 9. osztályban (műszaki tagozat) a lineáris törtfüggvények témakörének tárgyalásához ajánlom.

$ab = 6(a + b)$ egyenletből a zárójel felbontásával és $6a$ kivonásával kapjuk
$ab - 6a = 6b$ egyenletet.

Alakítsuk szorzattá a bal oldalt!

$a(b - 6) = 6b$

Osszuk be mindkét oldalt $b - 6$-tal! [$(b - 6)$ nem lehet 0.]

$$a = \frac{6b}{b-6}$$

Mikor lehet egész szám a jobb oldalon szereplő kifejezés?
Hozzuk transzformált alakra a lineáris törtfüggvényt!

$$a = \frac{6b}{b-6} \equiv \frac{6b-36}{b-6} + \frac{36}{b-6} = 6 + \frac{36}{b-6}.$$

$(b - 6)$ 36 osztója.
Innentől a megoldás megegyezik az előzővel.

Zsiga bácsi udvarán kacsák és disznók vannak, az állatoknak összesen 7 fejük és 20 lábuk van. Hány kacsa és hány disznó lehet?

II. megoldás

Módszer:	egyenlet
Évfolyam:	8.
Helyszín:	tanóra
Tanári attitűd:	közvetlen irányítás

A tanári feladat itt az alkalmazandó algoritmus pontos megtanítása frontális munkával, direkt kérdésekre adandó, egyszerű válaszok segítségével.

Foglaljuk táblázatba az adatokat! Milyen állatok, milyen jellemzőkkel szerepelnek a feladatban? Hány sor és oszlop szerepeljen?

	disznó	kacsa
fej		
láb		

Jelöljük x-szel a disznók számát! Ha összesen 7 állat van, mennyi a kacsák száma? Hány lába van x disznónak? Hány lába van $(7 - x)$ kacsának? Hány lábuk van összesen?

	disznó	kacsa
fej	x	$7 - x$
láb	$4x$	$2(7 - x)$

Írjuk fel a lábakra vonatkozó összefüggést, egyenlettel:

$$4x + 2\,(7 - x) = 20$$

Bontsuk fel a zárójelet! $x + 14 - 2x = 20$

Vonjunk össze a bal oldalon! $2x + 14 = 20$

Mérlegelv alkalmazása. $2x = 6$

$$x = 3$$

Megoldás: 3 disznó, 4 kacsa van.
Ellenőrzés: 3 disznónak 12 lába, 4 kacsának 8 lába, összesen az állatoknak tényleg 20 lába van.

Második lépés: Ugyanilyen algoritmusú feladat. *Cél*: az algoritmus rögzítése, elmélyítése. Tűzzük ki önálló munkára!

Csővezeték építéséhez nyolcméteres és ötméretes csöveink vannak, összesen 25 darab. Melyikből hány darabot kall felhasználnunk egy 155 méter hosszú vezeték építéséhez?

	ötméteres	nyolcméteres
darab	x	$25 - x$
hossz	$5x$	$8(25 - x)$

$$5x + 8\,(25 - x) = 155$$

$$5x + 200 - 8x = 155$$

$$-3x + 200 = 155$$

$$-3x = -45$$

$$x = 15$$

Megoldás: 15 darab ötméteres és 10 darab nyolcméteres csövet kell felhasználnunk.
Ellenőrzés: 15 darab ötméteres cső 75 méter, 10 darab nyolcméteres cső 80 méter, összesen (75 + 80) 155 méter.

III. megoldás

Módszer:	egyenletrendszer
Évfolyam:	9.
Tanári attitűd:	közvetlen irányítás
Helyszín:	tanóra

Zsiga bácsi udvarán kacsák és disznók vannak, az állatoknak összesen 7 fejük és 20 lábuk van. Hány kacsa és hány disznó lehet?

A tanári szerep az előző esethez hasonló, direkt kérdések, rövid, egyszerű válaszok szükségesek. A megoldási algoritmus rögzítése: szerencsés, ha a különböző szöveges feladatoknál a tanár ugyanúgy építi fel a megoldást, amennyiben lehetséges, ugyanazokat a kérdéseket feltéve.

Kérdés: Milyen változó mennyiségek szerepelnek? Jelöljük a disznók számát x-szel, a kacsák számát y-nal!
Kérdés: Milyen jellemzőik vannak? Írjuk fel a fejek, illetve a lábak számára vonatkozó összefüggéseket!

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 4x + 2y &= 20 \end{aligned}$$

Oldjuk meg a felírt egyenletrendszert!
Cél: az egyik ismeretlen kiküszöbölésével egyismeretlenes egyenletet kapjunk. Milyen módszerek vannak?

- **Behelyettesítő módszerrel:** Az első egyenletből kifejezzük y-t: $y = 7 - x$

A másodikba helyettesítve: $4x + 2(7 - x) = 20$ egyenletet kapunk.
Ezzel a feladat megoldását visszavezettük az előző esetre.

- **Egyenlő együtthatók módszerével:** Egyszerűsítsük a második egyenletet 2-vel:
  $$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ x + y &= 7 \end{aligned}$$

Vonjuk ki az elsőből a második egyenletet!

$x = 3$

A második egyenletből: $y = 4$.
Ellenőrzés: A lábak száma: 4×3 + 2×4 = 20.
Tehát 3 disznó és 4 kacsa van az udvaron.

- **Grafikus megoldás:** A feladat esetleg a lineáris függvények témakörének tárgyalásakor is kitűzhető 8. osztályban.

Jelöljük x-szel a disznók számát.
Hogyan változik x függvényében a kacsák száma?

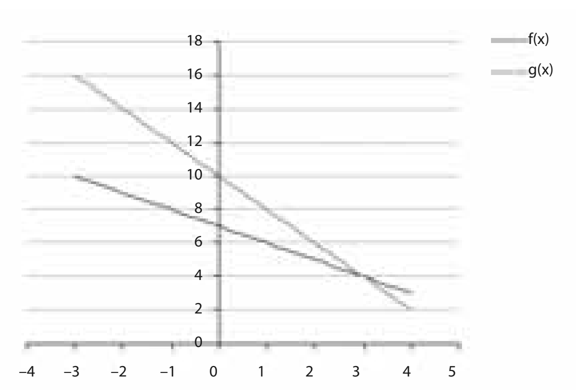
$f(x) = 7 - x$

A kacsák lábainak száma hogyan változik x függvényében? Mivel minden disznónak négy lába van, vonjuk ki ezt a mennyiséget a lábak számából: $20 - 4x$. Vezessük vissza a kacsák számának változására a kacsák lábainak változását!

$g(x) = 10 - 2x$

Mindkét függvény ugyanazt az összefüggést írja le, nevezetesen, hogyan függ a kacsák száma a disznók számának változásától.

Ábrázoljuk a két függvényt közös koordináta-rendszerben! Mennyi a tengelymetszet értéke? Mekkora a meredekség? *(1. ábra)*



1. ábra

Határozzuk meg a metszéspontot! A metszéspont koordinátái: M(3, 4).
Értelmezzük a megoldást: A metszéspont első koordinátája (3) a disznók száma, a második a kacsák száma (4).

2. feladattípus – Szélsőérték-számítás

Kiinduló feladat:

20 méter drót segítségével mekkora lehet a maximálisan bekeríthető téglalap területe?
Másképp megfogalmazva: Adott kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe?

I. megoldás
A feladat a másodfokú függvények ismerete nélkül érdekességként 8. osztályos szakkörön is elővehető.

Ehhez egyszerűsítsük úgy a feladatot, hogy a téglalap oldalai pozitív egész számok. Így a feladat véges sok eset vizsgálatára egyszerűsödik.

Az adott kerület 20 m. Jelöljük b-vel a téglalap hosszabb oldalát!

Ekkor: $a + b = 10$.

Készítsünk táblázatot a területváltozásról az oldalak függvényében! (Önálló munka.)

a	1	2	3	4	5
b	9	8	7	6	5
t	9	16	21	24	25

Értelmezzük a táblázatból nyert eredményt!
Megoldás: az adott kerületű téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb.

Algebrai eszközökkel is megmutatható a megoldás. *Cél:* a sejtés egzakt bizonyítása.

Szakkörön, versenyeken felhasználható, új eljárásokat is érdemes tanítani. A táblázat ugyanis sugallja, hogy minél kisebb a két oldal különbsége, annál nagyobb a terület.

Ötlet: Ha a kerület negyede 5 cm, akkor legyen $a = 5 - x$, és $b = 5 + x$.

Ekkor a területre: $t = ab = (5 - x)(5 + x) = 25 - x^2$.

A terület akkor maximális, ha x minimális, azaz $x = 0$. Ekkor $a = b = 5$. A téglalap négyzet.
A megoldás nem használja a feltételt, azaz nem csak pozitív egész oldalakra teljesül.

A feladat további általánosítása lehet:
Adott kerületű négyzetnek vagy körnek nagyobb a területe?

Megoldás: ha k kerületű négyzet oldala $a = \dfrac{k}{4}$, akkor a terület $t = \left(\dfrac{k}{4}\right)^2 = \dfrac{k^2}{16}$.

Ha k kerületű kör sugara $r = \dfrac{k}{2\pi}$, akkor a terület $t \equiv \left(\dfrac{k}{2\pi}\right)^2 \pi \equiv \dfrac{k^2}{4\pi}$.

A két kifejezés számlálója megegyezik, a nevezők közül a kör területének nevezője a kisebb, tehát a kör területe nagyobb a négyzet területénél.

20 méter drót segítségével mekkora lehet a maximálisan bekeríthető téglalap területe?
Másképp megfogalmazva: Adott kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe?

II. megoldás
A 10. osztályban tanórán, a másodfokú függvények témakörében szintén megoldható a feladat.
Jelölje a és b a téglalap oldalait, akkor $k = 2(a + b) = 20$, azaz $a + b = 10$. (Ez lesz a kiindulópont, a feltétel.)
Fejezzük ki b-t az a segítségével: $b = 10 - a$.
A téglalap területe: $t = ab = a(10 - a) = -a^2 + 10a$. (A területmérő függvény egyváltozós, másodfokú függvény.)

Határozzuk meg a másodfokú függvény szélsőértékének helyét!
Az eljárás a teljes négyzetté kiegészítés lesz. Lépései:

1. Emeljünk ki –1-et (főegyüttható, ha ez nem 1): $-(a^2 - 10a)$.
2. A zárójelben szereplő kifejezést írjuk fel teljes négyzetként: $-\left[\left(a-5\right)^2 - 25\right]$
3. Bontsuk fel a szögletes zárójelet: $(a - 5)^2 + 25$.

Értelmezés: A másodfokú függvénynek maximuma van, a helye $a = 5$, értéke $ab = 25$.
Tehát a maximális területű téglalap oldalai: $a = 5$, $b = 5$, tehát négyzet. A maximális terület 25.

A feladat általánosítása lehet:

20 méter hosszúságú dróttal bekeríthető téglalapnak mekkora lehet a maximális területe, ha egyik oldalával egy házfalra illeszkedik?

Vajon itt is négyzet a maximális területe?
A feltétel $2a + b = 20$. (Az oldalak közötti szimmetria megváltozik!)

Az előbbi módszer szerint fejezzük ki b-t: $b = 20 - 2a$.

$t = ab = a(20 - 2a) = -2a^2 + 20a$.

Határozzuk meg a függvény szélsőértékét teljes négyzetté való kiegészítéssel:

$-2a^2 + 20a = -2(a^2 - 10a) = $ n.

$$-2a^2 + 20a = -2\left(a^2 - 10a\right) = -2\left[\left(a-5\right)^2 - 25\right] = -\left(a-5\right)^2 + 50.$$

Tehát $a = 5$ és $b = 20 - 2a = 10$. (Nem négyzet!) A maximális terület: 50.

20 méter drót segítségével mekkora lehet a maximálisan bekeríthető téglalap területe?
Másképp megfogalmazva: Adott kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe?

III. megoldás

A másodfokú egyenletek tanításánál is visszatérhetünk a függvények szélsőértékére.
Határozzuk meg az $f(a) = -a^2 + 10a$ függvény szélsőértékhelyét!
Határozzuk meg ehhez a függvény zérushelyeit! (Másodfokú egyenlet gyökei.)

$-a^2 + 10a = 0$

Alakítsuk szorzattá a konstanshiányos másodfokú polinomot!

$a(-a + 10) = 0.$

A szorzat akkor lehet nulla, ha valamelyik tényező nulla.

$a_1 = 0$ és $a_2 = 10$.

A két zérushely szimmetrikus a parabola szimmetriatengelyére, amely a szélsőérték helyén átmenő y tengellyel párhuzamos egyenes.

Algebrai megközelítésben a szimmetria azt jelenti, hogy a szélsőérték helye a két zérushely számtani közepe (átlaga).

$$a \equiv \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{0+10}{2} = 5.$$

Abban az esetben, ha nincs zérushelye a függvénynek, akkor is meghatározhatjuk a szélsőérték helyét.

Az előbbi gondolatmenetben szereplő gyökök átlaga emlékeztet a Viete-formulákban szereplő összegre, vagyis $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, ahol a a főegyüttható, b az első-elsőfokú tag együtthatója a másodfokú egyenlet általános, 0-ra redukált alakjában. Ezek az együtthatók akkor is léteznek, ha nincsenek valós gyökök. (A Viete-formulák komplex gyökökre is érvényesek.)

A szélsőérték helyét így meghatározhatjuk. $u = -\frac{b}{2a}$.

20 méter drót segítségével mekkora lehet a maximálisan bekeríthető téglalap területe?
Másképp megfogalmazva: Adott kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe?

IV. megoldás
A szélsőérték-feladat megoldására felhasználható a számtani és mértani közép közötti összefüggés:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Két nem negatív valós szám mértani közepe nem nagyobb a számtani közepüknél. Az egyenlőség akkor teljesül, ha a két szám egyenlő. (A 10. évfolyam tanóráján a tételt be is bizonyítjuk, illetve megmutatható, hogy a mértani közép valóban középérték, azaz nem kisebb a kisebb, és nem nagyobb a nagyobb számnál.)

Itt a feladat feltétele: $k = 20$, azaz $\frac{a+b}{2} = 5$.

Ez az érték pontos felső korlátja a mértani középnek, azaz n maximális értéke 5. A maximális értéket akkor kapjuk, ha $a = b$, vagyis a téglalap négyzet.

A terület függvény: $f(a,b) = ab = \left(\sqrt{ab}\right)^2$.

A nem negatív valós számok halmazán az x^2 függvény szigorúan monoton növekvő, azaz a nagyobb szám négyzete nagyobb. Ebből pedig következik, hogy ab ott maximális, ahol $\sqrt{ab}$ maximális.

Tehát a megoldás: a maximális terület 25, és ez $a = b = 5$, azaz a négyzet esetén teljesül.

További feladat lehet:
Mutassuk meg, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege nem lehet kisebb, mint 2!

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

A reciprok definíciójából adódóan $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

$$2 = 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} \leq a + \frac{1}{a}.$$

Ebből következik az állítás.

A számtani és mértani közép közötti összefüggés gyakran felhasználható versenyfeladatok esetén, ahol egy összeg alsó korlátját kell meghatározni.

$$2 = 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} \leq a + \frac{1}{a}.$$

Például: Mutassuk meg, hogy a következő kifejezés értéke nagyobb, mint $\sqrt[4]{24}$!

$$\sqrt{5x - 4 - x^2} \cdot \left|\log_2 y\right| + \frac{\left|\log_y 2\right|}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}.$$

Megoldás: Vizsgáljuk meg a kifejezés értelmezési tartományát!

$y > 0$ és $y \neq 1$, továbbá $5x - 4 - x^2 \geq 0$ és $4x - 3 - x^2 > 0$

A másodfokú egyenlőtlenségeket megoldva $1 \leq x \leq 4$, illetve $1 < x < 3$ adódik.

A két logaritmust vizsgálva: $\log_y 2 = \frac{1}{\log_2 y}$.

Mivel kéttagú összeg alsó korlátját kell meghatároznunk, használjuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést:

$$\sqrt{5x - 4 - x^2} \cdot \left|\log_2 y\right| + \frac{\left|\log_y 2\right|}{\sqrt{4x - 3 - x^2}} =$$

$$= \sqrt{5x - 4 - x^2} \cdot \left|\log_2 y\right| + \frac{1}{\left|\log_2 y\right| \sqrt{4x - 3 - x^2}} \geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{5x - 4 - x^2}}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}}.$$

Alakítsuk szorzattá a gyöktényezős alak segítségével a másodfokú kifejezéseket. A közös gyök miatt lehet egyszerűsíteni:

$$\sqrt[4]{\frac{-(x-1)(x-4)}{-(x-1)(x-3)}}=\sqrt[4]{\frac{x-4}{x-3}}.$$

Vizsgáljuk meg a kifejezés értékét a megadott értelmezési tartományon: $(1 < x < 3)$

$$\frac{x-4}{x-3}=\frac{(x-3)-1}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}-\frac{1}{x-3}=1-\frac{1}{x-3}.$$

Ekkor $-2 < (x-3) < 0$, akkor $\frac{1}{x-3} < -\frac{1}{2}$.

$$2\sqrt[4]{\frac{x-4}{x-3}} > 2\sqrt[4]{1+\frac{1}{2}}=2\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[4]{24}=\sqrt[4]{2^4\cdot\frac{3}{2}}=2\sqrt[4]{\frac{3}{2}}.$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy a megadott kifejezés minden esetben nagyobb, mint $\sqrt[4]{24}$.

20 méter drót segítségével mekkora lehet a maximálisan bekeríthető téglalap területe?
Másképp megfogalmazva: Adott kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe?

V. megoldás
Szélsőérték-feladatok a 11. évfolyam fakultációs csoportjában is előkerülnek a differenciálszámítás témakörében.

Deriválható függvények esetén a szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az értelmezési tartomány adott helyén a derivált függvénynek zérushelye legyen.

A feladat esetén feltétel: $a + b = 10$. Ezért $b = 10 - a$.
$f(a) = a(10 - a) = -a^2 + 10a$

$f'(a) = -2a + 10$

$f'(a) = 0$

$$\begin{aligned} -2a + 10 &= 0 \\ -2a &= -10 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Tehát $a = 5$, $b = 10 - a = 5$.

$f''(a) = -2$, tehát a függvénynek tényleg maximuma van.

A maximum értéke: $t = ab = 25$.

A differenciálszámítás lehetővé teszi, hogy más, másodfokútól különböző függvények szélsőértékét meghatározzuk.

A feladat általánosítása lehet:
Adott térfogatú hengerek közül melyiknek minimális a felszíne?

Az adott térfogat legyen 2π. Ekkor $V = r^2 \pi m = 2\pi$.

Ekkor $r^2 m = 2$.

Fejezzük ki innen m-et! $m = \dfrac{2}{r^2}$.

A felszín: $A(r) = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2r^2\pi + 4r\pi\dfrac{1}{r^2} = 2r^2\pi + 4\pi\dfrac{1}{r}$.

A derivált függvény: $A'(r) = 4\pi r - 4\pi\dfrac{1}{r^2}$.

Zérushely: $4\pi r - 4\pi\dfrac{1}{r^2} = 0$.

Osszunk be 4π-vel: $r = \dfrac{1}{r^2}$.

Innen: $r^3 = 1$.

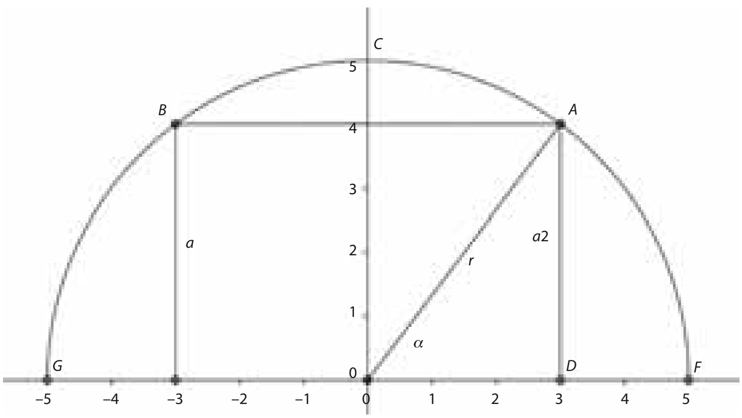
$r = 1$ $m = 2$.

A szélsőérték értéke: $A = 2\pi + 4\pi = 6\pi$.
(A minőség: minimum, mert $r > 1$ esetén $A'(r) > 0$, míg $r < 1$ esetén $A'(r) < 0$, vagy $A''(r) > 0$).

További általánosítás lehet:
Geometriai témájú szélsőérték-feladatban szerepelhet trigonometrikus kifejezés is, ha a változó valamilyen szög.
Példaként tekintsünk egy felvételi feladatot a korábbi évekből:

> Egy r sugarú félkörbe téglalapot rajzolunk úgy, hogy ennek egyik oldala a félkör átmérőjén feküdjön, két másik csúcspontja pedig a köríven. Mekkorák lehetnek az oldalai a legnagyobb területű (kerületű) ilyen téglalapnak?

A megoldáshoz készítsünk ábrát! *(2. ábra)*



2. ábra

Ha a félkör középpontja (O), a köríven levő csúcstól (A) r távolságra van. Legyenek a téglalap oldalai a és b, valamint jelölje α a b oldal és OA szögét.
Ekkor $a = r \sin \alpha$ és $b = 2r \cos \alpha$.
A terület: $t = ab = r \sin \alpha \, 2r \sin \alpha = 2r^2 \sin \alpha \, \cos \alpha$.
Mivel r rögzített, a terület akkor maximális, ha $\sin \alpha \, \cos \alpha$ maximális.
$\sin 2\alpha$ maximumértéke 1, és $\alpha = 45^o$.

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} r \quad \text{és} \qquad b = \sqrt{2r.}$$

A maximális terület $t = r^2$.

A kerület $k = 2(a + b) = 2\,(r \sin \alpha + 2r \cos \alpha) = 2r\,(\sin \alpha + 2 \cos \alpha)$.

A kerület akkor maximális, ha $\sin \alpha + 2 \cos \alpha$ kifejezés maximális.

A kifejezés átalakításához használjuk fel az $a \sin \alpha + b \cos \alpha = c$ trigonometrikus egyenlet megoldásakor használt ún. fáziseltolást (11. évfolyam, fakultáció).

Emeljük ki az együtthatók négyzetösszegének négyzetgyökét!

$$\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\alpha + \frac{5}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right).$$

A zárójelben szereplő kifejezés $\sin(\alpha + \beta)$ azonosság, mert ha $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, akkor $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, így a kifejezés $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$.

$\sin(\alpha + \beta)$ maximális értéke 1, ezért $\sin \alpha + 2 \cos \beta$ maximális értéke: $\sqrt{5}$.

A kerület maximális értéke: $k = 2r\sqrt{5}$.

A téglalap oldalai: $a = r\sqrt{5}$ és $b = 4r\sqrt{5}$.

3. feladattípus – Körök érintői

Körökkel kapcsolatos ismeretek minden évfolyam anyagában szerepelnek. Először a ponthalmazok témakörében, majd a Thalész-tétel, erre épülve a látókör és a hasonlóság fejezetében.

Az algebrai eszközrendszer kiépítése nem követi a geometriai ismereteket, ettől elmarad, ezért geometriai tárgyú számolási feladatok nem szerepelnek kellő súllyal.

A 11. évfolyamon a koordinátageometria témaköre lehetőséget adna arra, hogy az eddigi geometriai ismeretek, összefüggések összegzését adjuk. Ez főleg a fakultációs csoportban lehet hasznos, ahol nem elsősorban a számolási készség fejlesztése a cél, hanem a geometriai szemlélet fejlesztésével, a feladatokat több megoldási módszerrel megoldva összefoglaljuk, rendszerezzük, szintetizáljuk az eddigi geometriai ismereteket. Ezenkívül a geometriai feladatokkal nagyon jól fejleszthető az algoritmizáló, problémamegoldó képesség.

Ebben a részben a fenti célt úgy próbálom megvalósítani, hogy a kiinduló feladat paramétereit változtatva új probléma jöjjön létre.

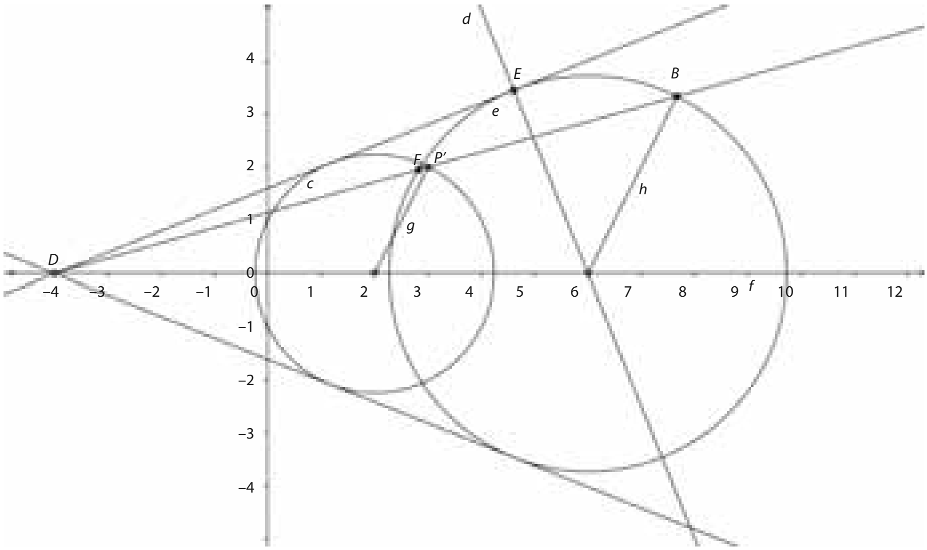
Kiinduló feladat:

Egy szögtartományban adott egy P pont. Rajzoljunk kört, mely áthalad a ponton, és érinti a szög szárait! (A feladat Pólya Györgytől származó, klasszikusnak számító feladat.)

I. megoldás
Szerkesztéssel, a középpontos hasonlóság témakörében. 10. évfolyamon, tanórán.
A tanár lépésről lépésre vezesse az osztályt, ezzel felépítve, illetve hangsúlyozva az algoritmust. A szerkesztés menetének közös felírása egyúttal az algoritmus összefoglalása. A szerkesztés végrehajtása már „technikai" feladat.
Mit nevezünk körnek? Mi határozza meg a keresett kört?

- A középpontját és sugarát kell meghatároznunk.
  Elemezzük a feladat feltételeit! Hol helyezkedik el a keresett kör (k) középpontja (C)? Mi azon pontok halmaza a síkon, melyek egy szög száraitól egyenlő távolságra vannak?
- A keresett ponthalmaz a szögfelező egyenes (f), melynek minden pontjára teljesül a feltétel.
  Válasszuk ki közülük a megfelelőt! Milyen kapcsolatban vannak a körök egymással?
- Egy tetszőlegesen választott kör (k') a keresett körrel (k) középpontosan hasonló, a hasonlóság középpontja a szög csúcsa (O).
  Hogyan adhatunk meg egy középpontos hasonlóságot? Mi határozza meg a hasonlóság arányát?
- Egy megfelelő pontpárt kell meghatározni. Melynek tárgypontja a megadott P pont?
  Mi metszi ki a tetszőlegesen megadott körből (k') a P-t? Milyen kapcsolat van O, P és P' között?
- A P' az O és P által meghatározott félegyenesen van (p).
  Hogyan lehet meghatározni a keresett kör (k) középpontját (C)? Milyen kapcsolat van CP és képe, $C'P'$ egyenesek között?
- Egyenes és képe párhuzamos, ha nem illeszkednek a középpontra.

Foglaljuk össze a szerkesztés menetét!
1. Szögfelező egyenes megszerkesztése (f).
2. Szárakat érintő tetszőleges kör megszerkesztése (k').
3. P' meghatározása. P' a k' kör és p egyenes (O, P) metszéspontja.
4. C meghatározása. A szögfelezőből a P-n átmenő $C'P'$-vel párhuzamos egyenes metszi ki.
5. k kör megrajzolása *(3. ábra)*.



3. ábra

Diszkusszió: A feladatnak két megoldása van, mert *p* egyenes két pontban metszi *k*’-t.

II. megoldás: Koordinátageometria

Határozzuk meg a P (1, 2) ponton átmenő koordinátatengelyeket érintő kör egyenletét!

Írjuk fel a kör középponti egyenletét!

$$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$$

Mi a mértani helye a tengelyeket érintő körök középpontjainak?

A két szögfelező egyenes.

Adjuk meg a szögfelezők egyenleteit!

$y = x$, illetve $y = -x$.

Adjuk meg a kör középpontjának koordinátáit, ha a kör a tengelyeket érinti, középpontja az első sík negyedben van, és sugara r!

$C\,(r, r)$.

Írjuk fel a koordinátatengelyeket érintő olyan körök egyenletét, melynek középpontja az első sík negyedben van!

$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.

Feladatunk az r paraméter meghatározása. Használjuk fel, hogy P illeszkedik a körre.

$(1 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2$.

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet! Hány megoldás várható?

$$1 - 2r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0$$

$r_1 = 1$ és $r_2 = 5$.

Két kör létezik, egyenletük: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ és $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
A feladat fejlesztése: önálló munkára.

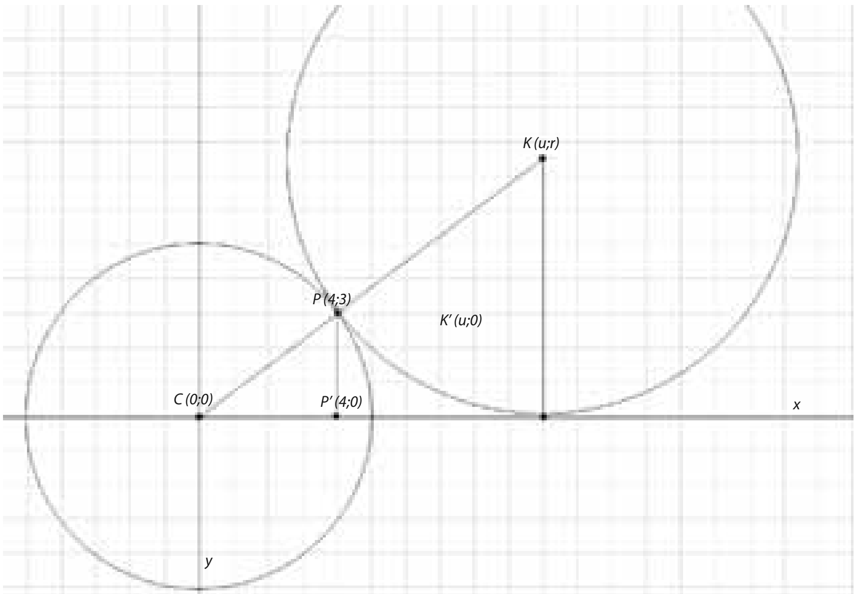
1. feladat:

Egy egységsugarú kör érinti a derékszög két szárát. Mekkora a sugara azoknak a köröknek, melyek érintik a derékszög két szárát és az adott kört?
vagy
Adott körcikkbe szerkesszünk kört, amely érinti a szög szárait, illetve a határoló körívet!

A megoldás gondolatmenete: Az érintési pont a szögfelező és az adott kör (körív) metszéspontja. Az érintési pont meghatározásával visszavezettük a feladatot az előzőre.

2. feladat:
Határozza meg annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört a P (4, 3) pontban kívülről érinti, és érinti az abszcisszatengelyt!

A feladat síkgeometria eszközeivel is megoldható. (Akárcsak az előző.)
Készítsünk ábrát! *(4. ábra)*



4. ábra

Az adott kör középpontja C (0, 0), a közös pont P (4, 3), és annak az x tengelyre eső vetülete P' (4, 0) alkotta háromszög, hasonló a C (0, 0), a keresett kör középpontja K (u, r), és vetülete K' (u, 0) alkotta háromszöggel.

Képezzük a megfelelő oldalak arányát!

$$\frac{u}{4} = \frac{r}{3} = \frac{r+5}{5}.$$

A két utóbbi kifejezés egyenlőségéből meghatározható r:

$$5r = 3(r+5)$$

$$2r = 15$$

$$r = 7{,}5.$$

r meghatározása után u is meghatározható:

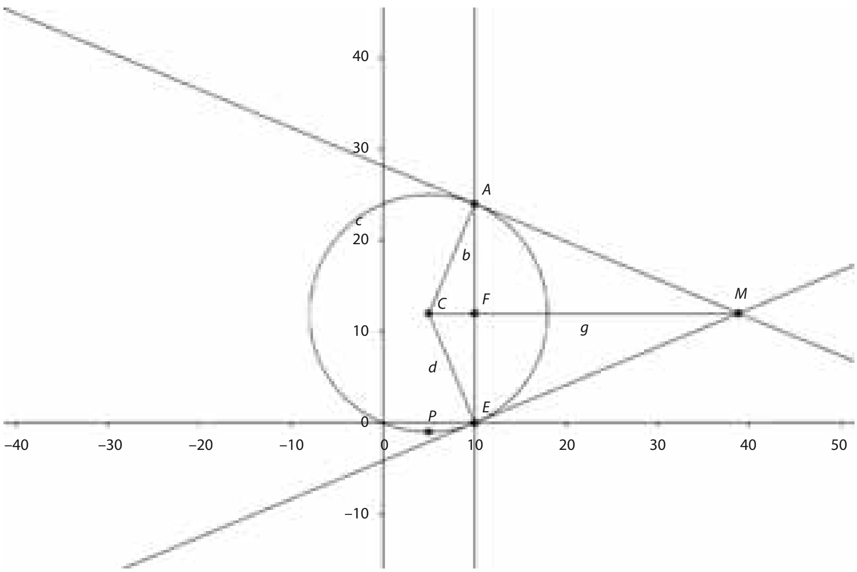
$$\frac{u}{4} = \frac{7{,}5}{3} \quad u = 10.$$

A keresett kör egyenlete: $(x - 10)^2 + (y - 7{,}5)^2 = 56{,}25$.

3. feladat:

Az $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$ egyenletű kör 10 abszcisszájú pontjaiban húzott érintők mely pontban és milyen szögben metszik egymást?

Készítsünk ábrát! *(5. ábra)*



5. ábra

Határozzuk meg az érintési pontokat! A kör és az $x = 10$ egyenes közös pontjait!

$(10 - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$

$(y - 12)^2 = 144$

$y - 12 = 12$ vagy $y - 12 = -12$

$y = 24$ vagy $y = 0$

A két érintési pont: $A(10, 24)$, illetve $B\ (10, 0)$.
A keresett metszéspont (M) illeszkedik az $y = 12$ egyenletű egyenesre.
A kör középpontja $C\ (5, 12)$, az egyik érintési pont (A) és a metszéspont (M) derékszögű háromszöget alkot.

A háromszögnek ismert az egyik befogója $AC = r = 13$, valamint az átfogóra eső merőleges vetülete $CT = 10 - 5 = 5$. Írjuk fel a befogótételt: $AC = \sqrt{CM \cdot CT}$, azaz $13 = \sqrt{5 \cdot CM}$

$$CM = \frac{169}{5} = 33{,}8$$ M abszcisszája CM + 5.

Tehát M (38,8; 12).

Az érintők fél szöge a CMA derékszögű háromszögből szögfüggvénnyel meghatározható:

$$\sin\alpha = \frac{13}{33{,}8} = 0{,}3846 \qquad \alpha = 22{,}62°$$

Az $y = 12$ egyenes szimmetriatengely, ezért az érintők hajlásszöge: $2\alpha = 45{,}24°$.

Megjegyzés: Az érintők szögét vektorok skaláris szorzatának segítségével is meghatározhatjuk:

$$\overrightarrow{CA}(5{,}12) = \overrightarrow{n_e} \quad \text{és} \qquad \overrightarrow{CB}(5 - 12) = \overrightarrow{n_f}.$$

A skaláris szorzat a koordináták szorzatának összege: $5 \cdot 5 + 12 \cdot (-12) = -119$.

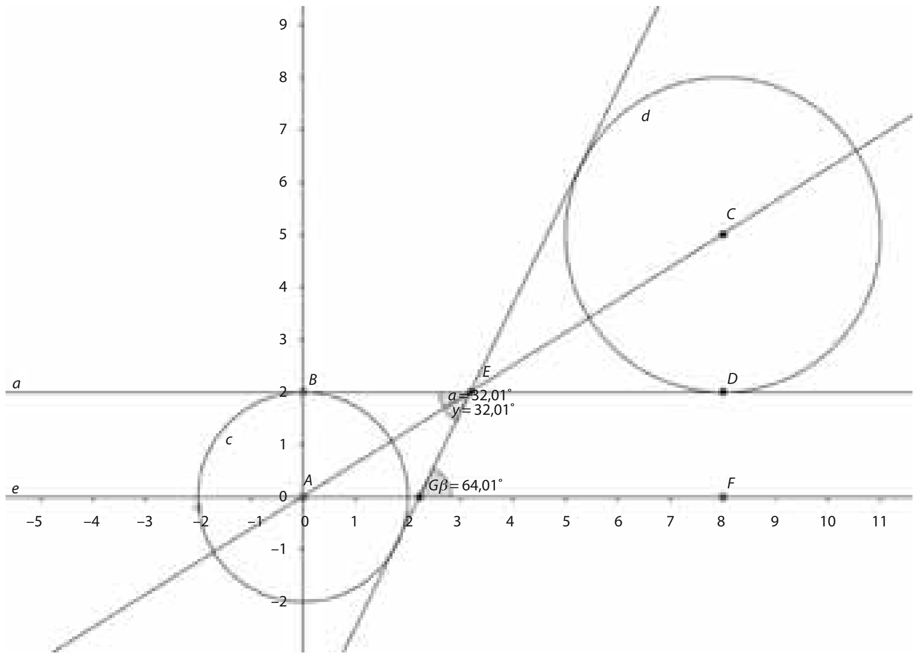
$$\sin\alpha = \frac{13}{33{,}8} = 0{,}3846 \qquad \beta = 134{,}76°.$$

A keresett szög a szög kiegészítő szöge, azaz $\alpha = 45{,}24°$.

4. feladat:

Az $x^2 + y^2 = 4$ és az $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 9$ egyenletű kör középpontját összekötő szakasz mely pontjából húzható közös érintő a két körhöz? Írja fel az érintők egyenletét!

Készítsünk pontos ábrát! *(6. ábra)*



6. ábra

Az ábra elemzéséből látható, hogy a két középpont távolsága $\left(\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}\right)$ nagyobb, mint a két sugár összege (5), tehát a két körnek léteznek közös belső érintői. Másrészt látható, hogy az egyik keresett érintő az x tengellyel párhuzamos, $y = 2$ egyenletű egyenes. (Az első kör legnagyobb ordinátájú pontjának [0, 2] ordinátája megegyezik a második kör legkisebb ordinátájú pontjának [8, 2] ordinátájával. Az ilyen tulajdonságú pontokban az érintő „vízszintes".)

A keresett pont a körök középpontjait összekötő (centrális) egyenes, illetve a fenti érintő metszéspontja.

A centrális irányvektora helyvektor (8, 5). Az egyenlete $5x - 8y = 0$.

$5x - 16 = 0 \qquad x = \dfrac{16}{5}.$

A metszéspont tehát: $M\left(\dfrac{16}{5}, 2\right)$.

A metszéspont a körök középpontos hasonlóságát felhasználva is meghatározható.

A hasonlóság arányának abszolút értéke a sugarak aránya: $|\lambda| = \frac{2}{3}$.

A keresett M (m_1, m_2) pont a körök középpontjait összekötő szakaszt tehát 2:3 arányban osztja:

$$m_1 = \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 8}{5} = \frac{16}{5} \qquad m_2 = \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 5}{5} = 2.$$

A másik érintő meghatározásához tekintsük az érintő irányszögét!

Ha a centrális egyenes irányszögét α jelöli, akkor váltószögek egyenlősége miatt ez a szög az érintők hajlásszögének a fele. Mivel a másik érintő vízszintes, ezért a keresett érintő irányszöge is 2α.

Ekkor $m = tg\alpha = \frac{5}{8}$. Ezért $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{25}{64}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{64}{39} = \frac{80}{39}$.

A másik érintőnek ismert egy pontja: $M\left(\frac{16}{5}, 2\right)$, meredeksége: $m = \frac{80}{39}$.

Az adatokat behelyettesítve az $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ egyenletbe: $y - 2 = \frac{80}{39}\left(x - \frac{16}{5}\right)$

$$y - 2 = \frac{80}{39}x - \frac{256}{39}$$

$$80x - 39y = 178.$$

Egy másik módszerrel, paraméteresen is meghatározhatjuk az érintőket: Az $M\left(\frac{16}{5}, 2\right)$ ponton átmenő összes egyenes $y - 2 = m\left(x - \frac{16}{5}\right)$ alakban írható.

(Kivéve az y tengellyel párhuzamos egyenest, melynek nincs meredeksége, de ez itt nem megoldás.)

Az érintőknek és az egyik körnek (például: $x^2 + y^2 = 4$) egy közös pontja van. Ezért az egyenleteikből képzett másodfokú egyenletrendszernek, és a belőle adódó másodfokú egyenletnek egy valós megoldása van. (Diszkrimináns nulla.)

$$x^2 + \left(m\left(x - \frac{16}{5}\right) + 2\right)^2 = 4$$

$$x^2+m^2x^2-\frac{32}{5}m^2x+\frac{256}{25}m^2+4mx-\frac{64}{5}m+4=4$$

$$\left(1+m^2\right)x^2+\left(4m-\frac{32}{5}m^2\right)x+\frac{256}{25}m^2-\frac{64}{5}m=0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa: $\left(4m-\frac{32}{5}m^2\right)^2-4\left(1+m^2\right)\cdot\left(\frac{256}{25}m^2-\frac{64}{5}m\right)=0.$

Egyszerűsítve 16-tal: $\left(m-\frac{8}{5}m^2\right)^2-\left(1+m^2\right)\cdot\left(\frac{64}{25}m^2-\frac{16}{5}m\right)=0$

$$m^2-\frac{16}{5}m^3+\frac{64}{25}m^4-\left(\frac{64}{25}m^2-\frac{16}{5}m+\frac{64}{25}m^4-\frac{16}{5}m^3\right)=0$$

$$\frac{-39}{25}m^2+\frac{16}{5}m=0$$

$m_1=0 \qquad m_2=\frac{39}{80}.$

Tehát az érintők egyenletei: $y=2 \quad y-2=\frac{80}{39}\left(x-\frac{16}{5}\right)$, azaz $80x-39y=178$.

Megjegyzés: Ha az érintőszakasz hosszát is meg kell határozni, akkor a geometriai szerkesztés elvét használhatjuk.

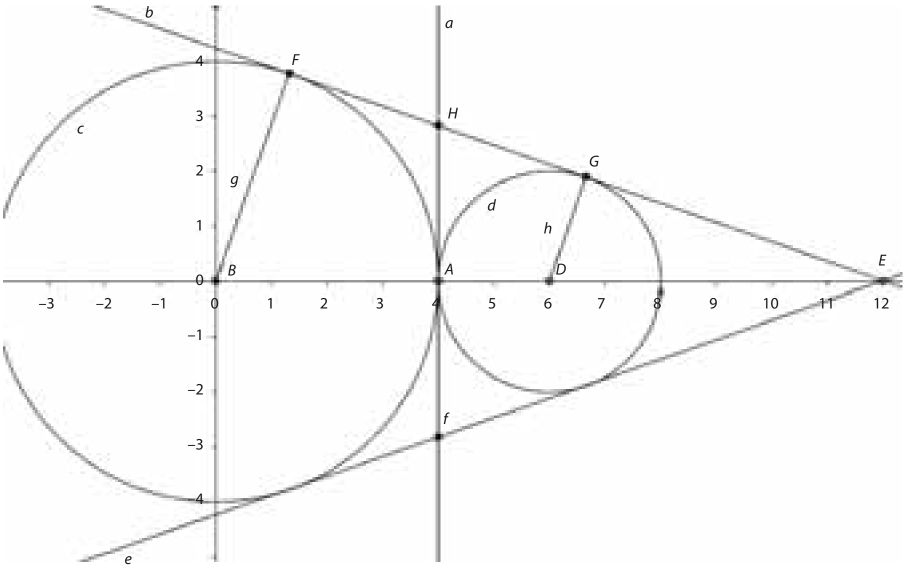
A Pitagorasz-tétel segítségével: $\sqrt{89}^2=\left(2+3\right)^2+e^2$.

Ebből $e=8$.

Felvételi feladat:

Két egymást kívülről érintő kör sugara R, illetve r. Adja meg a kör sugarainak függvényeként a két kör közös belső érintőjének a közös külső érintők közé eső szakaszát!

Készítsünk ábrát! *(7. ábra)*



7. ábra

A két középpont távolsága: $R + r$. A fentihez hasonlóan $(R + r)^2 = (R - r)^2 + e^2$.

$$e^2 = 4Rr, \quad e = 2\sqrt{R \cdot r}.$$

A centrális egyenes szimmetriatengely, másrészt a külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, ezért a belső érintő közös külső érintők közé eső szakaszának hossza egyenlő a külső érintőszakasz hosszával.

4. feladattípus – Sorozatok

A számsorozatok témakörét a tantervben külön fejezetként, csak az általános iskola, illetve a középiskola utolsó évfolyamán tanítjuk. Ugyanakkor a témának nagyon fontos szerepe van a versenyeken és a középiskolák központi felvételijén. Szakkörön kiemelt fontosságú fejezet, mert nagyon jól fejleszthető segítségével a gyerekek problémafelismerő, analogizáló képessége, valamint a kreativitásuk.

A fejezetben egy-egy példán keresztül a sorozatok ezen sokrétű alkalmazását szeretném bemutatni.

I. feladat:

Az 1, 2, …, 9 számok felhasználásával készíts bűvös négyzetet, ahol a sorokban, oszlopokban és átlókban szereplő számok összege megegyezik!

A feladatot általános iskolai szakkörre javaslom. Célszerű csoportmunkára kitűzni, a tanulók tanári rávezetés nélkül, egymással együttműködve próbálják megoldani a feladatot (kooperatív tanulási módszer).

Ha valamelyik csoport elkészült, ne a megoldást ismertesse, hanem rávezető kérdést fogalmazzon meg a többiek számára! (Lényeglátó képesség.)

Például: Melyik szám kerüljön középre? Melyik mező a kulcsfontosságú? Mennyi az összeg?

Ideális esetben a csoportok többsége eljut a megoldáshoz, így sikerélményhez jut. A megoldás után fontos az összegzés, illetve az általánosítás. Ezt a lépést a tanár irányításával tegyék, szerintem célszerű vázlatpontokba szedve a táblán végezni.

1. lépés: Melyik szám kerüljön középre?	5
2. lépés: Mennyi lesz az összeg?	15
3. lépés: Milyen számpárok képezhetők?	1–9, 2–8, 3–7, 4–6
4. lépés: Hová kerüljenek a páros (páratlan) számpárok?	párosok a csúcsok-ba
5. lépés: Hány megoldás van?	szimmetria

Általánosítás: Mennyi a kétjegyű pozitív egész számok összege?
(Gauss-módszer)
Használd az előző feladatban szereplő szimmetriát!
Mennyi az első és utolsó tag összege?
Hány ilyen szám van?

Megoldás:
Ha az elsőt az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel adom össze stb., az összeg mindig 109 lesz.
Összesen 90 darab szám (100 – 10) van, ez 45 számpárt jelent.
A keresett összeg tehát 109×45 = 4905.

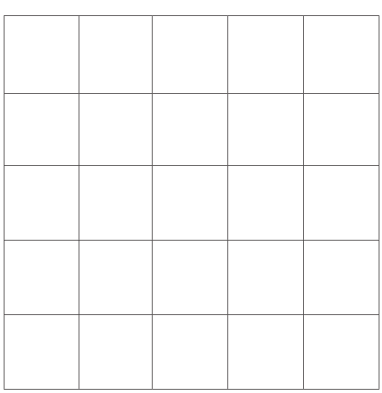
Mutassuk meg, hogy ha kilenc szám számtani sorozatot alkot, akkor készíthető ilyen bűvös négyzet! (Például az első 9 pozitív páros szám esetén.)

Utóbbi feladat lehet önálló munka, vagy házi feladat.

A matematikai tehetség azonosítása, kiválasztása speciális teszttel történik, de a célt jól szolgálhatják az IQ-tesztek is. Ezek a tesztek nagy számban alkalmaznak sorozatos feladatokat.

2. feladat:

Az ábrán egy 5×5-ös négyzet látható. Hány négyzetet látsz összesen az ábrán?



A feladat megoldása a fent leírtaknak megfelelően.
Kezdetben önálló munka.

Második fázis: Segítő kérdések

Milyen különböző oldalú négyzetek képezhetők?
Hányféleképp lehet kiválasztani például két oszlopot?
Hányféleképp lehet kiválasztani hozzájuk két sort?
Összesen hány 2×2 négyzet van?

Harmadik fázis: Közös összegzés (Írjuk közösen!)

1. lépés: 25 darab 1×1 kis négyzet van.
2. lépés: Vizsgáljuk meg a 2×2 négyzetek számát! Az oszlopok közül kiválaszthatjuk a szomszédosakat, a jobb felső sarka lehet: 2., 3., 4., 5. oszlopban.
3. lépés: A jobb alsó sarka lehet: 2., 3., 4., 5. sorban.
4. lépés: Összesen 4×4, azaz 16 ilyen négyzet látható.
5. lépés: Általánosítás: Hasonlóan az előzőhöz a jobb felső sarka 3., 4., 5. oszlop, és ugyanez igaz a sorokra. Összesen 3×3 = 9 négyzet van.
6. lépés: Végeredmény: Az összes négyzet 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55.

Megjegyzés: A megoldás általánosítható $n \times n$ négyzetre is.

Itt összesen $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ négyzet van.

Utóbbi képlet helyességét teljes indukciós bizonyítással láthatjuk be.
(12. évfolyam)

Egy Varga Tamás-versenyfeladat (2010):

Az alábbi számháromszög minden sorában, az ott látható számokat szorozzuk össze (az első sorban a szorzat 1), és az így kapott szorzatokat az első sorral kezdve adjuk össze! Van-e olyan sor, ahol az addig kapott szorzatokat összeadva 1-nél nagyobb négyzetszámot kapunk?

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21

Megoldás:

1. lépés: Határozzuk meg az első öt szorzatot!

   1, 6, 120, 5040, 360 360

2. lépés: Milyen összefüggés állapítható meg a szorzatok sorozata között? Mit tudok megállapítani a következő szorzatról?

A szorzatok a 3. elemtől kezdve nullára végződnek. Így a következő elem is.

Indoklás: Ha a tényezők között van öttel osztható (ha öt vagy annál több tényező van, akkor az egymást követő számok között mindig van), akkor mivel létezik a tényezők között páros szám, ezért a szorzat 10 többszöröse, tehát a szorzat nullára végződik.
(Hasonló probléma: 30! hány nullára végződik?)

3. lépés: Mi következik ebből az összegekre?

Az összegek mindig hétre végződnek, mivel az összeg végződését csak az első két sor változtatja.

4. lépés: Végződhet-e egy négyzetszám hétre?

Nem, tehát a feladat megoldása: Nem lehet ilyen sor.

Indoklás: A négyzetszámok végződését tekintve 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0 sorozatot kapunk. A kétjegyű vagy esetleg többjegyű négyzetszámok végződése is ilyen sorozatot követ.
Egy ab kétjegyű szám $10a + b$ alakban írható fel, ennek négyzete: $(10a + b)^2 =$
$= 100a^2 + 20ab + b^2$.
Azaz a kétjegyű ab szám négyzetének végződése megegyezik b négyzetének végződésével.

Megjegyzés: Hasonlóan mutatható meg, hogy az egyjegyű k, illetve $(10 - k)$ végződése is megegyezik.

Ugyanezen számcsoport esetén másképp is kitűzhető a feladat.
Egységes érettségi feladatgyűjtemény I. kötet (1529): Egyforma golyókat helyezünk el az asztalon háromszög alakban: az első sorban egyet, a következőben kettőt, majd a következő sorban hármat stb.

Írjuk fel a háromszöget a golyók sorszámainak segítségével!

					1					
				2		3				
			4		5		6			
		7		8		9		10		
	11		12		13		14		15	
16		17		18		19		20		21

a) Hányadik sorba kerül a 30. golyó?
b) Hány golyóra van szükség ahhoz, hogy a határoló háromszög oldala 10 golyóból álljon?

Megoldás:

a) A számcsoportot megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy ha n a sorok sorszáma, akkor a sor utolsó elemének sorszáma a számtani sorozat első n tagjának összege.
Például: $S_2 = 1 + 2 = 3$, $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ stb.

Ezért ha 30 lenne az n. sor utolsó eleme, akkor $30 = \frac{1+n}{2} \cdot n$

$n^2 + n - 60 = 0$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+240}}{2} = \frac{-1 \pm 15{,}52}{2}.$$

$n_1 = 7{,}26$ n_2 negatív

Mivel a sorozat pozitív számokból áll, ezért az összegsorozat szigorúan monoton növekvő.
Tehát a 30. golyó a 8. sorban van. (Nem az utolsóban.)

b) A fentiek alapján a 10. sor utolsó eleme: $\frac{1+10}{2} \cdot 10 = 55.$

Mivel a hatosztályos központi felvételin is lényeges szempont a matematikai képesség mérése, illetve a matematikai tehetség azonosítása, ezért itt is szerepelnek „sorozatos” feladatok.
A sorozat általában rekurzív és ciklikusan ismétlődő.

Például 2007/3. feladat

Dixi még 2006-ban kezdett el egy olyan programot futtatni a számítógépén, amely egy sorozat tagjait írta egymás után. A kezdő szám 2006 volt. Az újabb tagot mindig úgy kapta, hogy az előző tag számjegyeinek a háromszorosait összeadta. Dixi 2007 tagot íratott ki egymás után, így egy sokjegyű számot kapott.

a) Melyik számjegy áll a 25. helyen?
b) Melyik számjegy áll a 100. helyen?
c) Melyik számjegy áll a 2007. helyen?
d) Hány darab 2-es számjegy fordul elő összesen a leírt 2007 számban?
e) Hány számjegy marad meg összesen, ha a ketteseket kitöröljük?

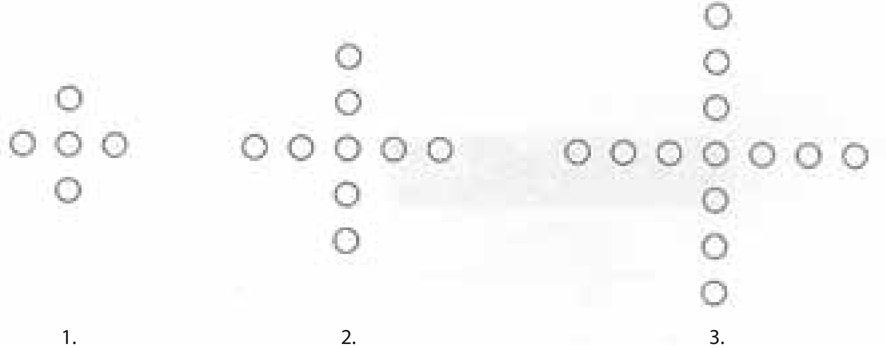
Megoldás felépítése:

1. lépés: A képzési szabály alapján írjuk fel a sorozat elemeit addig, míg ismétlődő elemeket nem kapunk!
2. lépés: Fogalmazzuk meg az ismétlődés szabályát!
3. lépés: Válaszoljunk a kérdésekre!

Megoldás végrehajtása:

1. 2006, 24, 18, 27, 27,…
2. A sorozat elemei a 4. tagtól kezdve ismétlődnek. Az ismétlődés 8 számjegy után kezdődik, a páratlan helyeken 2, a páros helyeken 7 áll.
3. *a*, 2; *b*, 7; *c*, 2; *d*, 2006 (csak egy számban nem szerepel a 2); *e*, 2010 (az elsőből 3, a harmadikból 2, a többiből 1).

Hasonló feladat a nyolcadikosok központi felvételi dolgozatából: (2009/7)
Itt a sorozat számtani sorozat. (A tananyagban így nem szerepel.)
Egy rajzzal megadott sorozat első három tagját látod *(8. ábra)*.



8. ábra

a) Milyen szabály szerint növekszik az egymást követő tagokban a körök száma?
b) Hány körből áll a sorozat 5. tagja?
c) Hány körből áll a sorozat 100. tagja?
d) A sorozat hányadik tagjának lerajzolásához kell pontosan 49 kör?

Megoldás:

a) A sorozatban néggyel nő a körök száma (számtani sorozat).
b) A sorozat 5. tagja 5×4 + 1 = 21 körből áll.
c) Hasonlóan 100. tag 100×4 + 1 = 401 [$a_n = a_1+(n-1)\times d$]
d) $n\times 4 + 1 = 49$ egyenlet megoldása
   $4n = 48$ Vegyük ki a középső kört.
   $n = 12$ Egy-egy oldalon 12 kör lesz. (Ez a 12. alakzat.)

Egyetemi felvételi feladat a korábbi évekből (Rekurzív megadású sorozat):

Melyek azok az *an* mértani sorozatok, amelyekben $a_1 \neq 0$, és minden pozitív egész számra az $a_n = \frac{1}{6}\left(a_{n+2} - a_{n+1}\right)$ egyenlőség érvényes?

Megoldás:

A mértani sorozat definíciója miatt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\left(= q\right).$

Innen $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}.$

Ebbe helyettesítve a feltételt: $a_{n+1}^2 = \frac{1}{6}\left(a_{n+2} - a_{n+1}\right) \cdot a_{n+2}$

$6 \cdot a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_{n+2} - a_{n+2}^2 = 0.$

Ha az egyenletet beosztjuk a_{n+1}-gyel, és rendezzük:

$$\left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right) - 6 = 0.$$

Ugyanakkor $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q.$

Tehát $q^2 - q - 6 = 0.$

Az egyenlet gyökei: $q_1 = 3$ és $q_2 = -2.$

Mindkét megoldás helyes. (Az első elem nincs rögzítve.)

A mértani sorozat lehetőséget ad például negyedfokú, szimmetrikus együtthatójú egyenlet megoldásának áttekintésére. (Korábban, a 10. évfolyamon is szerepelhet.)

Összefoglaló feladatgyűjtemény (3575): Az (an) mértani sorozatban $a_1 + a_3 + a_5 = 63$, $a_2 + a_4 = 30$. Melyik ez a sorozat?

Megoldás:
Írjuk fel az elemeket két ismeretlen, a_1 (esetleg a_3) és q segítségével a definíció alapján!

$$a_1 + a_1q^2 + a_1q^4 = 63 \qquad a_1q + a_1q^3 = 30.$$

Alakítsuk szorzattá a_1 kiemelésével az egyenleteket, majd osszuk el őket egymással!

$$\frac{a_1\left(1+q^2+q^4\right)}{a_1\left(q+q^3\right)} = \frac{63}{30}.$$

Az egyszerűsítések és a tört eltávolítása után redukáljuk nullára:

$$10q^4 - 21q^3 + 10q^2 - 21q + 10 = 0.$$

Osszuk végig q^2-tel:

$$10q^2 - 21q + 10 - \frac{21}{q} + \frac{10}{q^2} = 0.$$

Csoportosítsuk a tagokat:

$$10\left(q^2 + 1 + \frac{1}{q^2}\right) - 21\left(q + \frac{1}{q}\right) = 0.$$

Ha $\left(q + \frac{1}{q}\right) = x$, akkor $x^2 = q^2 + 2 + \frac{1}{q^2}$, tehát $q^2 + 1 + \frac{1}{q^2} = x^2 - 1$.

$$10(x^2 - 1) - 21x = 0$$

$$10x^2 - 21x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 400}}{20} = \frac{21 \pm 29}{20}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{-2}{5}.$$

$$\left|\left(q + \frac{1}{q}\right)\right| \geq 2, \text{ ezért } x_2 \text{ nem megoldás.}$$

(Szám és reciprokának összege, az összefüggés bizonyítása: pl. számtani és mértani közép kapcsolatával. Lásd szélsőérték-feladat.)

Ha $x_1 = \frac{5}{2} \qquad q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2}$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$q_1 = 2 \qquad q_2 = \frac{1}{2}.$$

Innen $a_1(q+q^3) = 30$ Ha $q = 2$ $a_1\,(2+8) = 30$ $a_1 = 3$.

Ha $q = \frac{1}{2}$ $a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = 30$ $a_1 = 48$.

A sorozat elemei: 3, 6, 12, 24, 48, illetve 48, 24, 12, 6, 3.

A 12. évfolyam fakultációs csoportjában tanítjuk a mértani sor fogalmát, illetve a sorozatok határértékét, konvergenciáját. Hasznos lehet általános iskolásoknak szakkörön foglalkozni (játékosan) a témakörrel, mert nagyon jól fejlesztheti a gyerekek szemléletét. A szemlélet kialakítása fokozatos, a problémakör megnyithatja a kaput az algebrából az analízis felé.

Bevezető feladatnak Zenon paradoxonját javaslom, Akhilleusz és a teknősbéka versenyfutásáról:

> (Szabadon elmesélve): Mivel Akhilleusz gyorsabb, mint a teknős, ezért a versenyben előnyt ad. Hiába fut azonban gyorsabban, mire megteszi az eredetileg köztük levő távolságot, addigra a teknős megtett valamennyi utat. Mire megteszi ezt a távolságot, a teknős újabb utat tesz meg. Mivel ez így folytatódik a végtelenségig, sohasem éri utol.

Mivel látszólag hibátlan a gondolatmenet, és a gyakorlat ellentmond, ezért nevezzük paradoxonnak.

Hol hibás a gondolatmenet?
Lehet-e végtelen sok pozitív szám összege véges?

Például: Mennyivel egyenlő a következő végtelen tagú összeg?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Megállapítják, hogy az összegek sorozata szigorúan monoton növekvő, de lehet-e felülről korlátos?
Érdemes egy, a táblára felrajzolt egységszakasszal szemléltetni az összeget.
Így önállóan is megállapíthatják, hogy a keresett összeg 1.

Feladat önálló munkára:
Egy 1 cm oldalú négyzet szomszédos oldalainak felezőpontjait kössük össze! A kapott négyzettel ismételjük meg a fenti eljárást, aztán az így kapott négyzettel újra és így tovább. Ha az eljárást végtelen sokáig folytatjuk, mekkora lesz a keletkező végtelen sok négyzet területeinek összege?

5. feladattípus – Kombinatorika, valószínűség-számítás

A fejezet a kétszintű érettségiben önálló területként szerepel.
Tanítása problémás: az alapfeladatok után hogyan, milyen irányban, milyen módszerekkel építhető fel a témakör? Mit kérjünk számon? Ehhez igazán sem a tankönyvek, sem a feladatgyűjtemények nem adnak útmutatást.

Szerintem a témakör második részének tanítását tanórán is a tehetséggondozásnál gyakran alkalmazott, úgynevezett kooperatív tanulás módszerével érdemes felépíteni. Ez az ajánlás egyaránt vonatkozhat a 10. évfolyamra, illetve a 11. évfolyam fakultációs csoportjára.

Az első részben az alapfeladatok tanítása, számonkérése történhet a „hagyományos" módszerrel. Cél a szükséges ismeretek, az „eszköztudás" megszerzése. A rész záruljon számonkéréssel. Utána szervezzünk az osztályból inhomogén csoportokat. Készítsünk feladatlapot, amit a csoportok önállóan oldanak meg, majd az óra második felében ismertetik a megoldást. Legyen házi feladat is, a feladatlapon szereplőkhöz hasonlító problémákból.

A kooperatív tanulás lényege, hogy közösen oldják meg a feladatot. A feladat ismertetését egy, a tanár által kijelölt gyerek végzi. Az értékelés a csoport együttes értékelése. A folyamatban a gyerekeknek együtt kell dolgozniuk, a gyengébbeknek is érteniük kell a közös megoldást, hiszen a csoport értékelése múlhat ezen. A házi feladat elkészítése is közös felelősséggé válik. Ugyanakkor fontos szakmai szempont, hogy körülbelül ugyanazt a munkamennyiséget végezzék el, mint a frontális munkamódszerrel.

A tanár szerepe itt sokkal összetettebb. Több és többféle munkát igényel, ugyanakkor a változatos munkaformák a gyerekek számára érdekessé tehetik a témakört. Célszerű előbb szakkörön és a fakultációs csoportban kipróbálni.

A fejezetben a kiinduló lépésekre, illetve egy lehetséges utolsó órára szeretnék egy-egy ötletet bemutatni.

Kombinatorika

1. feladat: (Nyolcadikosok központi felvételijéből)

Pista bácsi a kertjében öt helyre két salátát és három paprikatövet tervez. Hányféle különböző módon teheti ezt meg, ha a két paprika nem kerülhet egymás mellé? Rajzold le a lehetséges megoldásokat!

1. megoldás: elemi úton
A megoldások felsorolását könnyíti, ha logikailag rendezzük az egyes eseteket! Például írjuk fel a paprikaágyások sorszámát mint kétjegyű számokat!

13	P, S, P, S, S
14	P, S, S, P, S
15	P, S, S, S, P
24	S, P, S, P, S
25	S, P, S, S, P
35	S, S, P, S, P

Tehát összesen 6 eset lehetséges. A feladat szerepe a nyolcadikosoknál, hogy az ötletszerű felsorolást utólag rendszerezzük. Így biztosítható a megoldás teljessége, hogy egy eset se maradjon ki, és könnyebben megtaláljuk az összes megoldást.
A feladat 10. évfolyamon a kombinatorika eszközeivel is megoldható.

2. megoldás:
Tekintsük az összes olyan megoldást, melyben két paprika és három saláta szerepel.
A probléma öt elem olyan ismétléses permutációja, melyben két, illetve három elem ismétlődik.

$$P_5^{3,2(i)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

A feltétel alapján 4 esetet zárunk ki. (A szomszédos elemek: 1–2, 2–3, 3–4, 4–5.)
Tehát az összes megoldás száma: 6.

A képlet alkalmazása rövidítheti, egyszerűsítheti a feladat megoldását. Ugyanakkor szükség lehet a tapasztalatra, próbálgatásra, a képlet kizárólagos alkalmazása veszélyes.

A feladat azért lehet érdekes, hogy bemutassuk: két adott számú, ismétlődő elem esetén a kombináció és ismétléses permutáció egymásnak megfeleltethető. A fenti képlet megfelel öt elem másodosztályú (harmadosztályú) ismétlés nélküli kombinációjának.

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

A probléma azért lehet kiválasztás, mert például a paprikák helyének kiválasztásával megadtuk az összes esetet, a többi helyre kerülnek a saláták.

2. feladat:
Adott öt szám: 1, 2, 3, 4, 5 esetén hány olyan háromjegyű szám írható fel, ahol

a) van két megegyező számjegy,
b) a három különböző számjegy növekvő sorrendben követi egymást?

Megoldás:

a) Öt elem harmadosztályú ismétléses és ismétlés nélküli variációjának különbsége:

$$5^3 - \frac{5!}{2!} = 125 - 60 = 65.$$

A variációs képleteket rajz segítheti.

Házi feladat lehet:
Hány olyan háromjegyű szám van, melynek pontosan két ugyanolyan számjegye van?

b) A megoldás öt elem harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációja, hiszen három kiválasztott szám esetén csak egy jó (a növekvő) sorrend létezik, azaz nem kiválasztás és rendezés (variáció), hanem csak kiválasztás (kombináció):

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

A példa a variáció és kombináció összefüggése miatt lehet érdekes.

3. feladat:

Egy 9 lépcsőből álló lépcsősoron hányféleképp lehet felmenni, ha egyszerre egy vagy két lépcsőt léphetünk?

1. megoldás:
Az első lépcsőre egyféleképp, a másodikra kétféleképpen léphetünk (vagy egyből, vagy az első lépcsőfokról). A harmadik lépcsőfokra vagy az elsőről, vagy a másodikról, azaz összesen 1 + 2 = 3-féleképpen. Látható, hogy egy adott lépcsőfokra való lépések számát a két alatta levő összege adja.

Ez a rekurzív megadás a Fibonacci-sorozat megadása. $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Itt a sorozat: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Tehát 55-féleképp léphetek fel a 9. lépcsőfokra.

2. megoldás: Kombinatorikus eszközökkel
Az utat megtehetjük: 9 egyes, 7 db egyes, 1 db kettes, 5 db egyes, 2 db kettes, 3 db egyes, 3 db kettes, 1 db egyes, 4 db kettes lépéssel.
Az egyes esetekben a lehetőségek számát például a kettes lépések sorszáma adja.
Ez kilenc elem különböző kombinációja (ismétléses permutációja), azaz

$$\binom{9}{0}+\binom{8}{1}+\binom{7}{2}+\binom{6}{3}+\binom{5}{4}=1+8+21+20+5=55.$$

Tehát 55-féleképp léphetek fel a 9. lépcsőfokra.
Házi feladat: Egy konvex sokszög oldalainak és átlóinak összege 45. Hány oldalú a sokszög?

Ha csak elemi úton oldják meg a feladatot, meg lehet mutatni, hogy $\binom{n}{2}$ is adja a keresett összeget.

Valószínűség-számítás

A fejezet tanításának utolsó óráit szervezhetjük kooperatív tanulási módszer segítségével. *Cél:* a nehezebb feladatok megoldása. Erre szeretnék példákat, lehetőségeket mutatni. Elsősorban a fakultációs csoportok részére.

Egy-egy csoport a megoldás egy-egy részletét dolgozza ki.

1. feladat: (Frölich: 15 próbaérettségi matematikából)

Egy régióban bekövetkezett madárpusztulásért 3 ipari vállalat: a Füst, a Szmog és a Korom Kft. tehető felelőssé. A mérgezőanyag-kibocsátás eloszlása: a Füst Kft. 26%, a Szmog Kft. 44%, a Korom Kft. 30%. Mérések szerint az egyes üzemek mérgezőanyag-kibocsátása esetén a madárpusztulás valószínűsége: a Füst Kft.-nél 0,3, a Szmog Kft. esetén 0,5, a Korom Kft.-nél 0,2.

a) Mekkora a madárpusztulás teljes valószínűsége?
b) Mekkora bírságot rójon ki a bíróság, ha az elhullott madarak értéke 30 millió forint?

Megoldás:

$P(M) = 0{,}3 \times 0{,}26 + 0{,}5 \times 0{,}44 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}078 + 0{,}22 + 0{,}06 = 0{,}358.$

A madárpusztulás valószínűsége: 35,8%.

$$P(F / M) = \frac{0{,}078}{0{,}358} = 0{,}2179$$

A bírság összege: 30 000 000 × 0,2179 = 6 537 000 (Ft).

$$P(SZ / M) = \frac{0{,}22}{0{,}358} = 0{,}6145$$

A bírság összege: 30 000 000 × 0,6145 = 18 435 000 (Ft).

$$P(K / M) = \frac{0{,}06}{0{,}358} = 0{,}1676$$

A bírság összege: 30 000 000 × 0,1676 = 5 028 000 (Ft).

2. feladat:

10 alkatrészből 4 hibás. Az ellenőrzés során 3 alkatrészt választanak ki. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztottak közül *k* hibás (*k* = 0, 1, 2, 3), ha

a) az alkatrészeket egyszerre, visszatevés nélkül,
b) külön-külön, a megvizsgáltat visszatéve

választották ki?

Megoldás:

a) Az összes eset száma: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120.$

A kedvező esetek száma:

$k = 0$ esetén $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{6} = 20.$ $\quad P(k=0) = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6} = 0{,}167.$

$k = 1$ esetén $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1} = \dfrac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\dfrac{4!}{3!\cdot 1!} = \dfrac{6\cdot 5}{2}\cdot 4 = 60.$ $\quad P(k=1) = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5.$

$k = 2$ esetén $\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{2} = 6\cdot\dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6\cdot\dfrac{4\cdot 3}{2} = 36.$ $\quad P(k=2) = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3.$

$k = 3$ esetén $\binom{4}{3} = 4.$ $\quad P(k=3) = \dfrac{4}{120} = \dfrac{1}{30} = 0{,}03.$

b) A jó alkatrész kiválasztásának valószínűsége: $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}.$

A rossz alkatrész kiválasztásának valószínűsége: $\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}.$

$k = 0$ esetén: $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = \dfrac{27}{125} = 0{,}216.$

$k = 1$ esetén: $\binom{3}{1}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right) = 3\cdot\dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{2}{5} = \dfrac{54}{125} = 0{,}432.$

$k = 2$ esetén: $\binom{3}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = 3\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{25} = \dfrac{36}{125} = 0{,}288.$

$k = 3$ esetén: $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{8}{125} = 0{,}064.$

3. feladat:

Két dobókockával dobunk. A nyeremény a dobott pontok összege. Mennyi legyen a játék díja, ha a szervező haszonkulcsa 20%?

Megoldás:

Egy-egy dobás valószínűsége: $\dfrac{1}{36}.$

A dobott összeg: 2 (1+1), akkor a valószínűség: $\dfrac{1}{36}.$

A dobott összeg: 3 (1+2, 2+1), akkor a valószínűség: $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

A dobott összeg: 4 (1+3, 2+2, 3+1), akkor a valószínűség: $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

A dobott összeg: 5 (1+4, 2+3, 3+2, 4+1), akkor a valószínűség: $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

A dobott összeg: 6 (1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1), akkor a valószínűség: $\frac{5}{36}$.

A dobott összeg: 7 (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1), akkor a valószínűség: $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

A dobott összeg: 8 (2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2), akkor a valószínűség: $\frac{5}{36}$.

A dobott összeg: 9 (3+6, 4+5, 5+4, 6+3), akkor a valószínűség: $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

A dobott összeg: 10 (4+6, 5+5, 6+4), akkor a valószínűség: $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

A dobott összeg: 11 (5+6, 6+5), akkor a valószínűség: $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

A dobott összeg: 12 (6+6), akkor a valószínűség: $\frac{1}{36}$.

A nyeremény várható értéke:

$$\frac{1}{36}\cdot 2+\frac{2}{36}\cdot 3+\frac{3}{36}\cdot 4+\frac{4}{36}\cdot 5+\frac{5}{36}\cdot 6+\frac{6}{36}\cdot 7+\frac{5}{36}\cdot 8+\frac{4}{36}\cdot 9+\frac{3}{36}\cdot 10+\frac{2}{36}\cdot 11+\frac{1}{36}\cdot 12=$$
$$=\frac{1}{36}\cdot 14+\frac{2}{36}\cdot 14+\frac{3}{36}\cdot 14+\frac{4}{36}\cdot 14+\frac{5}{36}\cdot 14+\frac{6}{36}\cdot 7=14\cdot\frac{1+2+3+4+5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}=$$
$$=14\cdot\frac{15}{36}+7\cdot\frac{6}{36}=\frac{252}{36}=7.$$

A játék díja: 7×1,2 = 8,4.

A várható érték meghatározása logikai úton is lehetséges, mert egy elemi eseménynek definiálható a komplementer eseménye. Például 2–3 esetén 5–4, azaz x, y esetén $7-x$, $7-y$.
Így a nyeremény az aritmetikai közepük (átlaguk) lesz, 7.

A feladat fejlesztésének lehetőségei:
Cél: A fenti szimmetria megbontása.

1. A szervező a két dobás szorzatát fizeti ki nyereményként. Mennyi legyen a játék díja?

2. A szervező a két dobás összegét fizeti ki nyereményként, de csak akkor nyer a játékos, ha hatost dob az egyik kockával. Mennyi legyen a játék díja?

A feladatra felépíthető feladat:

Egy lottószelvény ára 200 Ft. A múlt héten a nyeremények a következők voltak:

öt találat	–	nem volt
négy találat	–	1 500 000 Ft
három találat	–	15 000 Ft
két találat	–	1 000 Ft

Mekkora volt a várható veszteség egy szelvényen?

Megoldás:

Először számítsuk ki az egyes esetek valószínűségét!

$$P\left(k=4\right)=\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}=\frac{5\cdot 85}{\frac{90!}{85!\cdot 5!}}=\frac{425}{\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{120}}=\frac{425}{43949268}=0,00000967.$$

$$P\left(k=3\right)=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}=\frac{\frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{85\cdot 84}{2}}{43949268}=\frac{10\cdot 3570}{43949268}=0,0008123.$$

$$P\left(k=2\right)=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}=\frac{\frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{85\cdot 84\cdot 83}{6}}{43949268}=\frac{10\cdot 98770}{43949268}=0,02247364.$$

A várható nyeremény értéke:

$1\,500\,000 \times 0{,}00000967 + 15\,000 \times 0{,}0008123 + 1000 \times 0{,}02247364 =$
$= 14{,}4 + 12{,}18 + 22{,}47 = 49{,}05.$

A PROGRAM RÉSZLETES TEMATIKÁJA

1. oszlop A továbbképzés tematikai egységeinek megnevezése; a tematikai egységek, résztémák, altémák megnevezése; a legkisebb tematikai egység tömör tartalmai kifejtése	2. oszlop A megfelelő tematikai egységekhez tartozó módszerek, munkaformák és tevékenységek megnevezése és tömör jellemzése	3. oszlop Az ismerethordozók, tananyagok, segédeszközök, taneszközök, egyéb, a tanításhoz szükséges tárgyi eszközök megnevezése és a tartalomra is utaló jellemzése a tematikai egységekhez tartozó munkaformánként	Az ellenőrzés–értékelés tematikai egységenként (ahol erre szükség van)		A tematikai egységenkénti foglalkozások és munkaformák óráinak száma	
			4. oszlop Az ellenőrzés módjának rövid ismertetése	5. oszlop Az értékelés szempontjainak megnevezése	6. oszlop Elmélet	7. oszlop Gyakorlat
1. ALAPFOGALMAK A TEHETSÉG FOGALMÁHOZ **1.1. A tehetségmodellek csoportosítása** A nagyszámú tehetségmodell csoportosítási lehetőségei a köztük levő hasonlóságok, különbségek alapján. A kapacitás-, a kognitív komponensek, a teljesítményorientált és a szociokulturális orientáltságú modellek jellemzői	• Előadás	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín)	Az elhangzottak összefoglaló jellegű megvitatása	Pontos fogalomhasználat	1	0
2. AZ ISKOLAI TEHETSÉGGONDOZÁS FŐBB MÓDSZEREI **2.1. Gazdagítás, dúsítás** Ezen belül: a gazdagítás fogalmának ismertetése, a gazdagítási modellek bemutatása, a gazdagítás gyakorlati lehetőségei az oktatásban életkoronként és intézménytípusonként, a gazdagítás tervezése a matematika területén.	• Előadás • Kis csoportos munka (munkakör szerinti bontásban)	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín)	A kis csoportos munka eredményének bemutatása során megfigyelés	A létrehozott produktumok belső logikája és szakmai minősége	1	2
2.2. Gyorsítás A gyorsítás fogalma, fajtái életkoronként és intézménytípusonként, kutatási érvek a gyorsítás mellett, irányelvek a gyorsítás alkalmazásához, a gyorsítás tervezése a matematika területén.	• Előadás • Kis csoportos munka (munkakör szerinti bontásban)	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín)	A kis csoportos munka eredményének bemutatása során megfigyelés	A létrehozott produktumok belső logikája és szakmai minősége	1	
2.3. Differenciálás Ezen belül: A differenciálás alapjai a tanuló személyiségében, a differenciálás általános eszközei, a tehetségek differenciált fejlesztésének problémái, életkoronként és intézménytípusonként, a differenciálás tervezése a matematika területén.	• Előadás • Kis csoportos munk (munkakör szerinti bontásban)	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín)	A kis csoportos munka eredményének bemutatása során megfigyelés	A létrehozott produktumok belső logikája és szakmai minősége	1	2

3. A MATEMATIKAI TEHETSÉG FELISMERÉSE, AZONOSÍTÁSA **3.1. A matematikai tehetség fogalma** A tehetség sokszínűségének demonstrálása: a tanulásban tehetséges gyerekek ismérvei, a módszerekben, illetve a gondolkodásmódban tehetségesek jellemzői.	• Interaktív előadás • Feladatsor elemzése • Gyakorlat páros munkaformában	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín) és PowerPoint prezentáció	Beszámolók meghallgatása, szóbeli értékelése	• Elemzés szakmai minősége	1	2
4. A MATEMATIKAI TEHETSÉGFEJLESZTÉS MÓDSZEREI, STRATÉGIÁI **4.1. A tehetségfejlesztés szervezeti formái** Különös tekintettel az iskolai tehetséggondozó programok differenciált haladást biztosító stratégiáinak bemutatására.	• Interaktív előadás	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín) és PowerPoint prezentáció	Hozzászólások meghallgatása	Adekvát fogalomhasználat	1	1
4.2. A problémamegoldás A különböző feladattípusok jellemzői, célirányos alkalmazásuk. Tesztfeladatok, nyílt végű feladatok. Feladatsorok jellemzői, szerkezete. Látásmód és elemzőkészség fejlesztése.	• Interaktív előadás • Feladatlap készítése kiscsoportos munkaformában	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín) és PowerPoint prezentáció	• Beszámolók meghallgatása, értékelés	• A feladatsor funkcióinak való megfelelése	2	2
4.3. Feladatsorok elemzése Kompetencia típusú feladatsorok (központi felvételi 6. és 8. osztályosoknak, érettségi). Versenyfeladatsorok (feleletválasztó és feladatmegoldó feladatsorok)	• Interaktív előadás • Feladatsor elemzése kiscsoportos munkaformában	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín) és PowerPoint prezentáció	• Beszámolók meghallgatása, értékelés	• Elemzés szakmai minősége	2	2
4.4. A matematikában kiemelkedően tehetségesek menedzselése Hazai mentorhálózat, korosztályonkénti kutatómunkát segítő bázisok.	• Előadás	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín) és PowerPoint prezentáció	• Hozzászólások	Adekvát fogalomhasználat	1	0
4.5. A tanári attitűd szerepe a tehetségfejlesztésben A lehetséges tanári modellek az óravezetésben és a tanár–diák kapcsolatokban.	• Előadás • Önismereti teszt • Vita	Flipchart (1 db) és filctollak (4 szín) és PowerPoint prezentáció	• hozzászólások meghallgatása	Adekvát fogalomhasználat	1	2
5. SEGÉDANYAGOK HASZNÁLATA Az alkalmazható feladatgyűjtemények, folyóiratok megismerése. A felhasználható honlapok megkeresése.	• Internetes böngészés • Kis csoportos munka • Közös összegzés	• Internet	• Csoportbeszámolók meghallgatása • szóbeli értékelés	Önállóság	0	2

AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ÉS ALKALMAZÁSAI

A jegyzetnek ebben a részében egy előadást írok le, amelyet a gimnáziumunkban rendezett „Kossuth-hétre” készítettem, majd elhangzott 2009 őszén Pécsen, a Vezetőtanárok Módszertani Konferenciáján.

Az előadás célja annak bemutatása, hogy hogyan lehet összefoglalni az integrálszámításról középiskolákban tanultakat, illetve hogyan és milyen irányban lehet később az egyetemen erre az alapra építkezni.

Elsősorban 12. évfolyamos faktos gyerekek számára készült, de úgy próbáltam felépíteni, hogy az érdeklődő, alsóbb évfolyamra járó gyerekek is tudják követni a gondolatmenetet.

A felhasznált segédeszköz az aktív tábla, amely segítségével az előadás interaktívvá válhat, mert így menet közben is lehet beleírni, kiegészíteni a Power Pointban készült diákat. Az előadás után pedig akár a táblakép, akár a diák kinyomtathatók.

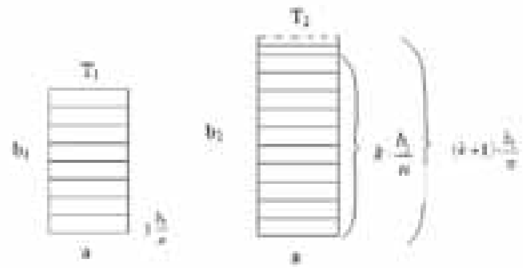
Az előadás felhasználható a tehetséggondozásban is, mert az emelt szintű érettségire felkészítő tehetséggondozó szakköröket ilyen formában lehet tartani. Ilyen előadás-sorozat egyik eleme lehetne az integrálszámításról tartott előadás. Erre lenne igény a tanulók részéről, és szervezhető lenne a város középiskolásainak.

Az aktív tábla használatáról is érdemes lehet beszélgetni, mert várhatóan a következő években az iskolák egyre szélesebb köréhez jut el.

Az előadás diái:

Területszámítás

Állítás: $\frac{T_2}{T_1}=\frac{b_2}{b_1}$



Bizonyítás:

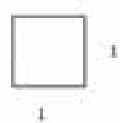
$$k\cdot\frac{b_1}{n}\le b_2<(k+1)\cdot\frac{b_1}{n} \qquad k\cdot\frac{T_1}{n}\le T_2<(k+1)\cdot\frac{T_1}{n}$$

$$\frac{k}{n}\le\frac{b_2}{b_1}<\frac{k+1}{n}=\frac{k}{n}+\frac{1}{n} \qquad \frac{k}{n}\le\frac{T_2}{T_1}<\frac{k+1}{n}$$

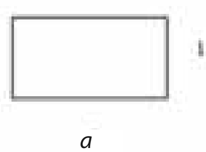
$$\left|\frac{T_2}{T_1}-\frac{b_2}{b_1}\right|<\frac{1}{n}$$

1. dia

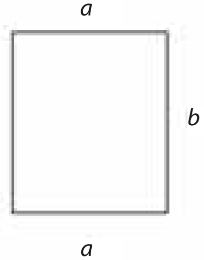
Következmény:



$T=1$



$T=a$



$T=ab$

2. dia

A parabolikus háromszög területe, a határozott integrál

$s_n \leq T \leq S_n$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = T = \int_a^b f(x)dx$$

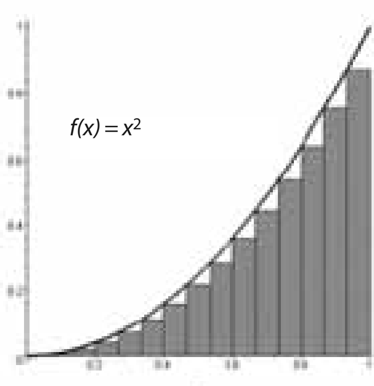
Definíció:

Az [*a*; *b*]-n értelmezett függvény Riemann-integrálható az [*a*; *b*]-n, ha alsó és felső közelítő összegének létezik határértéke, és a kettő egyenlő. Ekkor a közös határértékeket a függvény határozott integráljának nevezzük.

3. dia

A parabolikus háromszög területe

Beírt téglalapok területének összege



$$s_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right) =$$

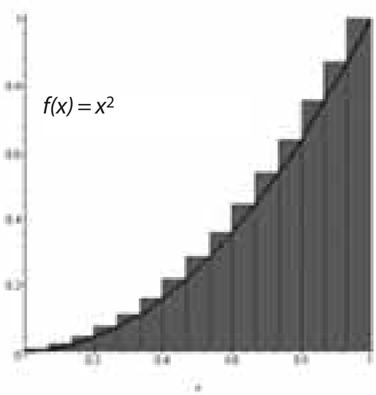
$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$$

4. dia

A parabolikus háromszög területe

Körülírt téglalapok területének összege



$$S_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$$

5. dia

A határozatlan integrál, mint a felső határ függvénye

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \qquad \int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \qquad \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Integrálfüggvény: Legyen az f függvény az $[a; b]$-n integrálható és $x \in [a; b]$. Ekkor az $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ függvényt f integrálfüggvényének nevezzük.

Primitív függvény: Legyen az $f(x)$ függvény az $[a; b]$-n értelmezve. Az $f(x)$ primitív függvénye olyan $F(x)$ függvény, amelyre $F(x) = f(x)$ minden $x \in [a; b]$-re.

Határozatlan integrál: Az f függvény primitív függvényeinek a halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük.

6. dia

Newton–Leibniz-formula, az integrál tulajdonságai

Newton–Leibniz-formula: $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Tulajdonságok: $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

7. dia

Alapfüggvények integráljai

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

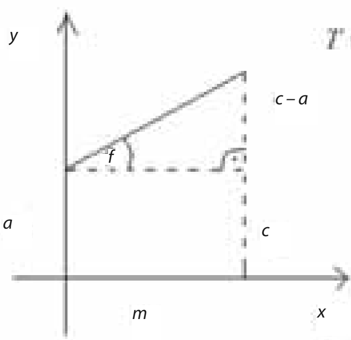
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

8. dia

Feladat

Határozzuk meg a trapéz területét!



$$T=\int_0^m\left(\frac{c-a}{m}\cdot x+a\right)dx=\frac{c-a}{m}\cdot\int_0^m x\,dx+a\cdot\int_0^m 1\,dx=$$

$$=\frac{c-a}{m}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^m+a\cdot[x]_0^m=$$

$$=\frac{c-a}{m}\cdot\frac{m^2}{2}+a\cdot m=$$

$$=\frac{(c-a)\cdot m+2am}{2}=\frac{am+cm}{2}=\frac{m(a+c)}{2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{c-a}{m}\rightarrow f=\frac{c-a}{m}\cdot x+a$$

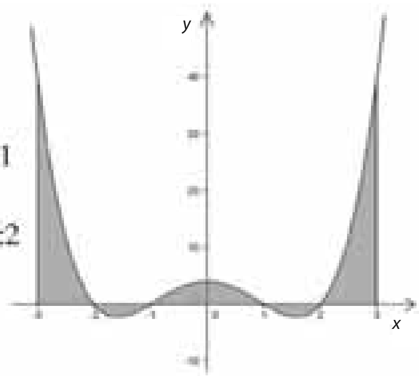
9. dia

Feladat

Számítsuk ki az $y = x^4 - 5x^2 + 4$ egyenletű görbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = -3$ és $x_2 = 3$ határok között!

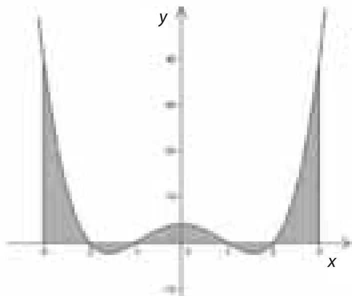
Zérushelyek: $x^4-5x^2+4=0$

$$\left(x^2\right)_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}\Rightarrow \begin{array}{l} x^2=1\rightarrow x=\pm 1\\ x^2=4\rightarrow x=\pm 2\end{array}$$



10. dia

Feladat



$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 \qquad t_1 = t_5 \qquad t_2 = t_4$$

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \qquad F(x) = \frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x$$

$$t_5 = \int_2^3 \left(x^4 - 5x^2 + 4\right)dx =$$

$$= F(3) - F(2) = \frac{234}{15} - \frac{16}{15} = \frac{218}{15}$$

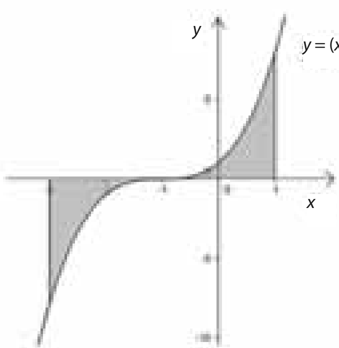
$$t_4 = \left|\int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4)dx\right| = \left|F(2) - F(1)\right| = \left|\frac{16}{15} - \frac{38}{15}\right| = \frac{22}{15}$$

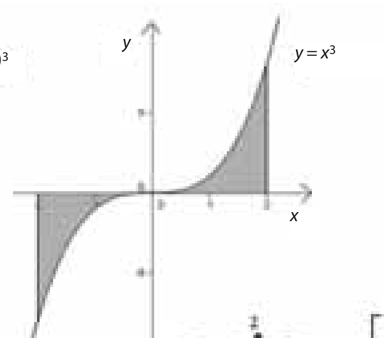
$$t_3 = 2\cdot\int_0^1 \left(x^4 - 5x^2 + 4\right)dx = 2\cdot F(1) = \frac{76}{15} \qquad T = 2\cdot t_5 + 2\cdot t_4 + t_3 = \frac{556}{15}$$

11. dia

Feladat

Határozzuk meg az $y = (x + 1)^3$ függvény és az x tengely közötti területet az $[-3; 1]$ intervallumon!



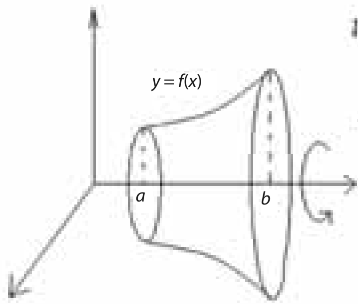


$$T = 2\int_0^2 x^3 dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8$$

12. dia

Térfogatszámítás integrállal

Forgástestek térfogata



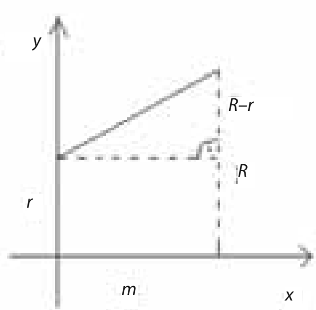
$$V_n = \frac{b-a}{n}\cdot\left(M_1^2\cdot\Pi + M_2^2\cdot\Pi + \ldots + M_n^2\cdot\Pi\right)$$

$$v_n = \frac{b-a}{n}\cdot\left(m_1^2\cdot\Pi + m_2^2\cdot\Pi + \ldots + m_n^2\cdot\Pi\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} V_n = V = \int_a^b \Pi\cdot f^2(x)dx = \Pi\cdot\int_a^b f^2(x)dx$$

13. dia

Csonkakúp térfogata



$$V = \Pi\cdot\int_0^m\left(\frac{R-r}{m}\cdot x + r\right)^2 dx =$$

$$= \Pi\cdot\int_0^m\left(\frac{R^2-2Rr+r^2}{m^2}x^2 + 2\cdot\frac{Rr-r^2}{m}x + r^2\right)dx =$$

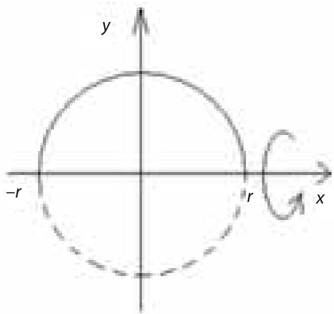
$$= \Pi\cdot\left[\frac{R^2-2Rr+r^2}{m^2}\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{Rr-r^2}{m}\cdot\frac{x^2}{2} + r^2x\right]_0^m =$$

$$f(x) = \frac{R-r}{m}\cdot x + r$$

$$= \frac{\Pi\cdot m}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

14. dia

A gömb térfogata



$$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$$

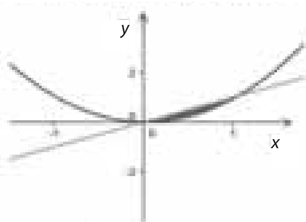
$$V=\Pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\Pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=$$

$$=\Pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4r^3\Pi}{3}$$

15. dia

Feladat

Határozzuk meg az $y = x^2$ és az $y = x$ függvények közötti síkidom területét és a síkidom x tengely körüli elforgatásával keletkező forgástest térfogatát!



$x^2 = x$ $\qquad$ $x(x-1)=0$

$x^2 - x = 0$ $\qquad$ $x_1 = 0, x_2 = 1$

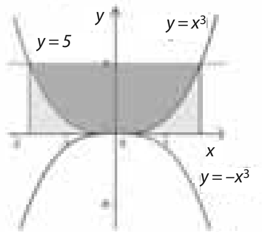
$$T=\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx \qquad T=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$V=\Pi\int_{x_1}^{x_2}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx \qquad V=\Pi\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\Pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\Pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2\Pi}{15}$$

16. dia

Feladat

Számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $y = x^3$, az $y = -x^3$ és az $y = 5$ egyenletű görbék által határolt síkrész x tengely körüli forgatásakor kapunk!



Metszéspontok:

$$-x^3 = 5 \to x_1 = -\sqrt[3]{5} \qquad x^3 = 5 \to x_2 = \sqrt[3]{5}$$

$$V_H = r^2 \Pi M = 25 \cdot \Pi \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{5} = 50 \cdot \Pi \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$V_1 = \Pi \int_0^{\sqrt[3]{5}} f^2(x)dx = \Pi \int_0^{\sqrt[3]{5}} (x^3)^2 dx = \Pi \int_0^{\sqrt[3]{5}} x^6 dx = \Pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^{\sqrt[3]{5}} = \Pi \frac{5^{\frac{7}{3}}}{7} = \Pi \frac{25\sqrt[3]{5}}{7}$$

$$V = V_H - V_1 = 50 \cdot \Pi\sqrt[3]{5} - \frac{50 \cdot \Pi \cdot \sqrt[3]{5}}{7} = \frac{6}{7} \cdot 50\Pi\sqrt[3]{5}$$

17. dia

Integrálási módszerek

Helyettesítés

$$\int (x+1)^3 dx = \int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)dx = \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + x + c$$

Helyettesítés:

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x)dx = \int f(t)dt + c$$

Ha:

$$u(x) = t \to u'(x) = \frac{dt}{dx} \to dt = u'(x) \cdot dx$$

1. példa:

$$x + 1 = t \to x = t - 1 \to \frac{dx}{dt} = 1 \to dx = dt$$

$$\int (x+1)^3 dx = \int (x+1)^3 \cdot 1dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(x+1)^4}{4} + c$$

18. dia

Integrálási módszerek
Helyettesítés

2. példa: $\int (3x+2)^3\,dx = \int t^3\,dx =$

$3x+2 = t \rightarrow x = \frac{t-2}{3} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

$$\int t^3 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^4}{4} + c = \frac{1}{12}(3x+2)^4 + c$$

19. dia

Integrálási módszerek
Speciális típusok

$$1.)\int f(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

Példák:

$$a.,\int x\cdot(x^2+2)dx = \frac{(x^2+2)^2}{4} + c$$

$$b.,\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$$2.)\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

Példa:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) + c$$

20. dia

Integrálási módszerek
Parciális integrálás

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \rightarrow u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v dx = \int (u \cdot v)' dx - \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

Példa:

u'=sinx → u= - cosx

v=x → v'=1

$$\int x \cdot \sin x dx = -\cos x \cdot x - \int (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

21. dia

Integrálási módszerek
Parciális törtekre bontás

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdot \ldots \cdot (x-x_n)} = \int \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{An}{x-x_n} \right)$$

Példa:

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)} dx = ? \qquad \frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

$$\frac{A(x+4)+B(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{Ax+4A+Bx-2B}{(x-2)(x+4)} = \frac{x(A+B)+4A-2B}{(x-2)(x+4)}$$

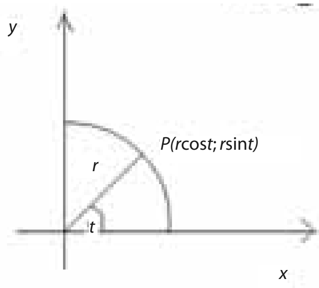
$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 4A-2B=1 \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)} dx = \int \frac{\frac{1}{6}}{x-2} dx + \int \frac{-\frac{1}{6}}{x+4} dx = \frac{1}{6}\left(\ln|x-2| - \ln|x+4|\right) + c$$

22. dia

Ívhossz számítása integrállal

Negyed kör kerülete



$$x = r \cdot \cos t \rightarrow x' = r \cdot (-\sin t)$$

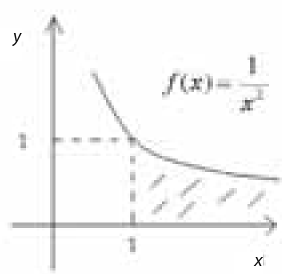
$$y = r \cdot \sin t \rightarrow y' = r \cdot \cos t$$

$$x'^2 + y'^2 = [r \cdot (-\sin t)]^2 + [r \cdot \cos t]^2 =$$
$$= r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cdot \cos^2 t =$$
$$= r^2 \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,dt = [r \cdot t]_0^{\frac{\pi}{2}} = r \cdot \frac{\pi}{2}$$

23. dia

Az improprius integrál



$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{B \to +\infty} \int_1^{B} \frac{1}{x^2}\, dx =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^B = \lim_{B \to +\infty} \left(-\frac{1}{B} + 1\right) = 1$$

<u>Ellenpélda:</u>

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{B \to +\infty} \int_1^{B} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{B \to +\infty} [\ln x]_1^B$$

→ divergens, nem létezik improprius integrálja

24. dia

IRODALOM

A problémamegoldás iskolája. I–II. Írta: Pólya György. Tankönyvkiadó, Budapest.

Czeizel E. (1997): *Sors és tehetség.* Minerva Kiadó, Budapest.

Egyetemi felvételi feladatok matematikából 1986–95. Szerk.: Scharnitzky Viktor. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

IQ tesztek. Írta: William Gatez. T-Rex 94 Kft.

Matematika 7.–12. Szerk.: Hajdu Sándor. Műszaki Kiadó, Budapest.

Matematika felvételi feladatok. Szerk.: Dr. Kántor Sándorné. Studium 96 Bt., Debrecen.

Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény. I–III. Szerk.: Czapáry Endre. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Repeta–Matek. Szerk.: Dr. Gerőcs László. Scolar Kiadó, Budapest.

Tehetség és iskola. Szerk.: Balogh László. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen.

Versenyfeladatok matematikából 1975–2007. Szerk.: Dr. Kántor Sándorné. Studium 96 Bt, Debrecen.

15 Próbaérettségi matematikából. Szerk.: Frölich Lajos. Maxim Kiadó, Szeged.